# Matematik A

# Undervisningsvejledning, GU

# September 2011

**Vejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens enkelte punkter. Citater fra læreplanen er anført i kursiv.**

## Introduktion

På fagets side på emu.dk er der placeret yderligere forløb og materialer til inspiration.

## *1. Fagets rolle*

*Faget bygger på abstraktion, logisk tænkning og ræsonnementer og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Faget beskæftiger sig både med teoretiske og anvendelsesorienterede emner. Fagets anvendelsesorienterede dimension består i, at der ved hjælp af matematiske teorier og modeller beskrives, analyseres og vurderes på tekniske, naturvidenskabelige, økonomiske som samfundsmæssige emner og relationer alt efter den uddannelse, som faget indgår i.*

Matematikken skal bl.a. indgå i samspil med andre fag og som et redskab ved løsning af problemstillinger inden for de øvrige naturvidenskabelige fag. Endvidere skal der i undervisningen arbejdes med fagets teoretiske og ræsonnerende sider. De metoder, der anvendes i forbindelse med matematikundervisningen, er centrale i forbindelse med al udvikling og efterprøvning af teknisk og teknologisk viden, ved opstilling af økonomiske modeller og anvendelse af prognoser til beslutninger og styring. Eleven lærer at give en vurdering af matematikkens anvendelse i dagligdagen.
I matematik anvendes it-værktøjer som naturlige hjælpemidler. Eleven anvender matematiske begreber, metoder og informationsteknologiske hjælpemidler i forbindelse med formulering, analyse og løsning af teoretiske og praktiske problemer.

## *2. Fagets formål*

### *2.1 Viden og færdigheder*

*Eleverne skal have en sådan viden om matematiske begreber og færdigheder i at anvende fagets arbejdsmetoder, at de kan forstå, analysere, vurdere og træffe beslutninger i komplekse systemer i såvel samfunds- og erhvervs- som studiemæssige sammenhænge. De skal have indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at erkende, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder såvel som indsigt i matematisk ræsonnement.*

Undervisningen i faget skal medvirke til at udvikle elevens faglige nysgerrighed og mod til at gå i gang med anvendelse af faget ved modellering af autentiske problemstillinger og styrke refleksionen over egen læring. Desuden er det vigtigt, at elevens forståelse af, at matematik optræder som et redskab overalt i dagligdagen og i medierne, øges.

### *2.2 Lærings- og arbejdskompetencer*

*Eleverne skal have fagligt grundlag for at erfare, at matematik både er et redskab til problemløsning og til kreativ virksomhed. Eleverne skal kunne tilegne sig ny viden om faget og have bevidsthed om de muligheder, som faget rummer. Eleverne skal kunne tage et medansvar for egen læring og have tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.*

Det er hensigten, at eleverne opnår studiekompentencer der ruster til den selvstændighed og evne til samarbejde der er nødvendig på videregående uddannelse. Dette afspejles i undervisningsformerne.

### *2.3 Personlige og sociale kompetencer*

*Eleverne skal kunne forstå og anvende matematik i forskellige sammenhænge og i personlige og sociale sammenhænge kunne strukturere, abstrahere og tænke logisk. Eleverne skal selvstændigt og i fællesskab kunne finde egne løsningsmetoder gennem undersøgende og problemløsende aktiviteter. I tilknytning hertil skal eleverne være i stand til at kunne forholde sig til andres brug af matematik*

Eleven vil gennem en progression i arbejdsformer fra den lærerstyrede undervisning til gruppearbejde omkring projekter med efterfølgende præsentation kunne opbygge personlige såvel som sociale kompetencer.

***2.4 Kulturelle og samfundsmæssige kompetencer***

*Eleverne skal have fagligt grundlag for at opleve og erkende matematikkens rolle i en kulturel og samfundsmæssig sammenhæng. Eleverne skal være i stand til at forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse med henblik på at tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk samfund.*

Gennem arbejdet med matematiske modeller, herunder økonomiske og statistiske modeller, og disses begrænsninger vil eleven kunne opnå indsigt i matematikkens rolle i samfundet.

***3. Læringsmål og indhold***

***3.1 Læringsmål***

Læringsmålene er de overordnede retningslinjer for og krav til undervisningen. Det er slutmålene for de tre års undervisning i faget, der er angivet. Alle målene skal nås, og rækkefølgen er ikke udtryk for en prioritering af målene. Det kan være en idé at opdele de endelige mål i nogle delmål, der gradvis opfyldes. Hvorvidt eleven har opfyldt fagets slutmål, undersøges ved de afsluttende prøver. Her bedømmes eleven i forhold til bedømmelseskriterierne, som kan betragtes som en operationalisering af fagets mål i forhold til evalueringen. Læringsmålene er derfor styrende for undervisningens indhold.

*Eleverne skal kunne:*

a) *håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold,*

Håndtering af variabelsammenhænge introduceres bedst gennem eksemplarisk materiale, der giver eleverne fortrolighed med matematisk notation, definitioner og begreber. I arbejdet med formler, ligninger og symbolholdige udtryk vælges et eksempelmateriale, så eleverne får indtryk af matematikkens mange anvendelser i andre fag, samt af matematikkens beskrivelseskraft i håndtering af sammenhænge mellem variable, der er knyttet til virkelige fænomener. Inddragelse af matematik-historiske perspektiver på matematikkens anvendelse af symbolholdigt sprog kan give eleverne indsigt i, hvorledes matematikkens symbolholdige sprog er trådt ind på scenen som et værktøj, der kan sammenfatte antagelser og viden fra matematik selv eller fra andre fag i kompakt form.

b) *behandle et talmateriale ved hjælp af statistiske metoder og kunne formidle resultater og konklusioner,*

Statistik er videnskaben om indsamling, håndtering og fortolkning af data fra omverden. Selv på et elementært niveau skal statistik ofte forholde sig til ubearbejdede data, og det ligger i fagområdets natur, at statistiske konklusioner ikke kan opnås og præsenteres med samme grad af sikkerhed, som man ellers er vant til i den øvrige del af matematikundervisningen. Dette skal præge undervisningen, så eleverne får et tydeligt indtryk af statistikkens særlige karakter. Overalt præsenteres vi for oplysninger og påstande, der baserer sig på forskellige mængder og typer af data. Eleverne skal kunne præsentere et observationssæt på en hensigtsmæssig måde, således at enkle konklusioner kan uddrages.

c) *redegøre for og løse geometriske problemstillinger,*

Her kan med fordel anvendes forskellige tilgange. En opgave kan stilles ud fra tekstoplysninger, hvorefter eleverne skal tegne en trekant og beregne manglende størrelser. En opgave kan også tage udgangspunkt i givne tegninger, hvor det er elevernes opgave at uddrage de oplysninger der skal benyttes til at foretage en matematisk behandling.

d) *gennemføre modelleringer og have forståelse af den opstillede models begrænsninger og rækkevidde,*

Eleven kan arbejde med en bred vifte af modeller. Statistiske modeller kan anvendes til beskrivelse af et konkret datamateriale, såsom fordelingen af højder i klassen eller på skolen. Det kunne også være andet realistisk datamateriale fremskaffet via samarbejde med andre fag, for eksempel samfundsfag, idræt, biologi eller fysik.

Geometriske modeller kan anvendes i en lang række konkrete situationer. Eleven kan eksempelvis bruge trekantsberegninger til at bestemme højden af en flagstang eller en bakke i naturen.
Et datamateriale kan også søges modelleret via regression. Her undersøges om materialet eventuelt kan beskrives ved en lineær-, en eksponentiel- eller en potenssammenhæng. Modellens gyldighedsområde indgår naturligt i denne situation. Et eksempel på frembringelse af et datamateriale kunne være en simulering af radioaktivt henfald ved kast med 100 terninger. En kerne er henfaldet hvis udfaldet er en 6'er. Fjern alle 6'ere, notér antal tilbageværende terninger og gentag eksperimentet. Anvend eksponentiel regression til at opstille en model for henfaldet.
Nogle fænomener i naturen er periodiske og kan modelleres ved hjælp af de trigonometriske funktioner. En simpel modellering af tidevand kunne være et eksempel. Her kunne datamaterialet være fremskaffet i forbindelse med et samarbejde med geografi eller via tidevandstabeller. Se afsnit 6.1 og 6.2 for flere eksempler og ideer.

e) *anvende forskellige repræsentationer af matematiske begreber,*

Med dette menes forskellige måder at beskrive eller udtrykke det samme begreb.
Et eksempel kunne være at udtrykke begrebet "en vektor". Det kan gøres ved at opskrive en vektors koordinater eller opskrive vektorens længde og retning. Et andet eksempel med forskellig notation for samme begreb kunne være begrebet "differentialkvotient", hvor man kan skrive dy/dx eller f´(x), osv.

f) *demonstrere fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement,*

Eleverne skal så tidligt som muligt stifte bekendtskab med matematikkens opbygning i forudsætninger (aksiomer), definitioner og sætninger. De skal kunne forstå og fremlægge væsentlige ideer i en række beviser indenfor de forskellige områder af faget.
Der skal arbejdes systematisk med det matematiske ræsonnement igennem hele forløbet, således at eleven opnår en fortrolighed med "hvad vides", "hvad forudsættes" og "hvad skal bestemmes". Denne træning sker gennem mundtlig fremstilling såvel som gennem skriftlige afleveringsopgaver og rapporter.

Det er vigtigt, at matematik ikke blot behandles som et ”metodefag”, hvor forskellige teknikker læres udenad eller hvor IT løser problemerne for eleven. Det matematiske bevis og tilegnelsen af dette giver en indsigt i fagets natur ligesom det øger forståelsen for hvorfor netop den pågældende sætning er sand.

g) *analysere konkrete teoretiske og praktiske problemstillinger, opstille en matematisk model for problemet, løse det matematiske problem, dokumentere samt tolke løsningen praktisk,*

En af styrkerne ved matematikken er fagets evne til ved hjælp af modeller at kunne løse konkrete problemstillinger. For at kunne opstille en matematisk model er det nødvendigt at gøre sig klart hvad man ønsker modelleret. Derefter skal problemet matematiseres, dvs. der skal indføres variable som beskriver det pågældende problem. Det kunne være variable som tid, masse, antal eller andet.
Når problemet er omformet til en matematisk form kan matematiske metoder benyttes til at give en matematisk løsning, som så skal transformeres tilbage til det oprindelige problem.
Det er vigtigt at forholde sig til modellens gyldighed under denne transformation.

h) *præcist formidle matematiske metoder og resultater,*

Det er vigtigt, at eleverne opnår fortrolighed med formidling af matematikkens struktur og korrekt matematisk sprogbrug, samt med de metoder der anvendes. Den skriftlige formidling trænes systematisk gennem afleveringsopgaver samt tema- og projektrapporter. Den mundtlige formidling kan ske gennem fremlæggelser for klassen. Det kan være ved gennemgang af et matematisk bevis, fremlæggelse af en rapport eller af en PowerPoint præsentation.

i) *demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling, og*

Der kan laves projektforløb eller temaforløb hvor matematik anvendes. Det kunne for eksempel være i forbindelse med afkøling af en kop varm chokolade, hvor Newtons afkølingslov anvendes som model. Det kunne efterfølgende give anledning til en diskussion af mere komplekse problemer som for eksempel havenes afkøling og klimamodeller, uden at disse modeller dog gennemgås i detaljer. Se afsnit 6.1 og 6.2 for inspiration.

*j) anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer fra kernestoffet og i umiddelbar forlængelse heraf.*

Som it-værktøj kan eksempelvis anvendes programmer som Maple eller MathCAD. Disse giver mulighed for både at foretage matematiske operationer, tegne grafer og skrive tekst. Endelig kan programmerne benyttes hvis eleverne skal løse ligninger ikke kan løses analytisk.

Dynamiske programmer som Graph og GeoGebra er mindre, men kan downloades på internettet, og kan være gode til at fremme elevernes visuelle forståelse. Eksempelvis kan GeoGebra benyttes til at tegne en forskrift for et andengradspolynomium, hvorefter der kan justeres på koefficienterne *a*, *b* og *c*, og det vises dynamisk hvilken indvirkning det har på polynomiet.

Det kan anbefales at man ikke laver længerevarende introduktionsforløb til it-værktøjer, da det lærte hurtigt glemmes. Derimod anbefales at man løbende viser eleverne hvordan et program kan anvendes i det netop lærte stof. Det fremmer også elevernes motivation og er med til at variere undervisningen. Endelig anbefales at der ikke bruges for megen undervisningtid på it det første halve år, da eleverne risikerer at miste forståelse, fordi de tænker: ”Det løser vi bare på computer”.

### *3.2 Kernestof*

*Kernestoffet er:*

a) *regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder, procent- og rentesregning, renteformlen*

Denne del af kernestoffet er ikke tænkt som et afgrænset forløb, hvor eleverne udelukkende træner opgaver i ”at regne”. Derimod er det medtaget for at fastholde fokus på nævnte emner, der er en vigtig forudsætning for at kunne opnå mange af de matematiske kernekompetencer. Eksempler er manipulation med tal og bogstaver i bevisførelse, forståelse for grundmængdens størrelse ved modellering osv. Der indgår brugen af parentesreglerne og udregning af flerleddede udtryk såsom kvadratet på en toleddet størrelse og to tals sum gange to tals differens. Potensregneregler både med rationel og hel eksponent. Ligeledes indgår de grundlæggende regler for løsning af ligninger og uligheder, herunder bestemmelse af grundmængde og løsningsmængde og korrekt brug af matematisk notation. Begrebet numerisk værdi introduceres, og eleverne løser ligninger, hvor numeriske størrelser og rodtegn indgår.

Under procentregning forventes det bl.a. at indekstal behandles, og i forbindelse med renteformlen skal gennemsnitlig rente, samt omregning af rente mellem forskellige tidsrum indgå.

Det kan under indøvning af elementære regneregler og færdigheder være en god ide at variere mellem traditionel opgaveregning og brug af IT som for eksempel PMHs interaktive matematiksider. Se afsnit 6.2.

b) *beskrivende statistik med ugrupperede og grupperede observationssæt (variable) – herunder grafisk beskrivelse, kvartilsæt og middeltal,*

Deskriptiv (beskrivende) statistik arbejder med metoder til at håndtere usikkerhed. En fordel ved statistik er den direkte anvendelse på ting der observeres i hverdagen, og som så kan vurderes ud fra statistiske metoder. Eleverne skal altså møde mange forskellige eksempler. Ved hjælp af deskriptorerne middeltal, typetal, typeinterval og kvartilsæt, skal de kunne drage konklusioner omkring det statistiske datasæt. Eleverne skal have kendskab til de grafiske beskrivelser ved hjælp af stolpediagram, histogram og sumkurve.

c) *forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter,*

Her kan tidligere nævnte dynamiske geometri-programmer benyttes. Cosinus, sinus og tangens introduceres med præcise definitioner ud fra enhedscirklen, og ikke alene som et beregningsværktøj. Eleverne skal have kendskab til beregningsmetoder i ensvinklede trekanter, samt i retvinklede trekanter. Eleverne skal have kendskab til sinus- og cosinusrelationerne, ligesom det forventes, at de har kendskab til begreberne højde, median og vinkelhalveringslinje i vilkårlige trekanter.

d) *analytisk geometri – herunder analytisk beskrivelse af linjer og cirkler samt afstandsberegning mellem punkter og mellem punkt og linje,*

e) *geometrisk og analytisk vektorregning i plan og rum, herunder bestemmelse af projektioner, afstande og vinkler; linjer, planer, kugler og kuglens tangentplan,*

Behandlingen af plangeometrien bør ske udfra både en geometrisk og en vektoranalytisk betragtning. De elementer der samlet forventes at indgå i punkt d) og e) er følgende:

Vektorer i planen

Eleverne skal beherske regnereglerne for vektorer i planen samt kunne bestemme følgende:

- Tværvektor til en given vektor
- Skalarproduktet mellem to vektorer samt betydningen af dette
- Determinant for et vektorpar samt betydningen af dette bl.a. ved arealberegning
- Projektion af vektor på vektor

Analytisk geometri i planen

Eleverne skal kunne følgende:

- Opstille og omskrive ligninger for cirkler samt bestemme tangenter til cirkler
- Omskrivning mellem ligning og parameterfremstilling for linje
- Bestemme skæringspunkter mellem linjer, og mellem linjer og cirkler
- Bestemme afstand mellem to punkter og fra punkt til linje
- Ud fra en given linje bestemme en ligning for den ortogonale linje
- Bestemme vinkel mellem to linjer

Vektorer i rummet

Eleverne skal beherske regnereglerne for vektorer i rummet samt kunne bestemme følgende:

- Skalarproduktet mellem to vektorer samt betydningen af dette
- Projektionen af vektor på vektor
- Krydsproduktet mellem to vektorer, fortolkning af denne vektor bl.a. ved arealberegning

Analytisk geometri i rummet

- Opstille og omskrive ligninger for kugler samt bestemme tangentplaner til disse
- Ligning for planer og parameterfremstilling for linjer
- Evt. skæringspunkter mellem linjer, mellem linjer og planer, og mellem linjer og kugler
- Vinkler mellem linjer, linjer og planer, og mellem to planer
- Bestemme afstande mellem to punkter, afstand fra punkt til linje, afstand fra punkt til plan og afstand mellem vindskæve linjer

f) *grundlæggende egenskaber og grafiske forløb for polynomier, eksponentielle funktioner, logaritmefunktioner, potensfunktioner samt de trigonometriske funktioner cosinus og sinus; sammensat funktion,*

Med fokus på modelleringer, kan man arbejde med opstilling af sammenhænge ud fra givne data f.eks. målepunkter og/eller hældninger. Disse sammenhænge kan beskrives ved grafer eller forskrifter (se g)). Eksempelvis kan eksponentielt voksende og aftagende funktioner blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald; sin og cos som funktioner af reelle tal præsenteres i sammenhæng med behovet for at kunne modellere fænomener der udviser periodisk svingning, for eksempel vekselspænding eller tidevand.

Men undervisningsforløb kan også tilrettelægges således, at man først introducerer og studerer elementære funktioners karakteristiske egenskaber og siden inddrager disse i en modelleringssammenhæng. Eksempelvis kan potensfunktioner introduceres i sammenhæng med en generalisering af potensbegrebet, og funktionsklassens karakteristiske egenskaber kan blive studeret i et rent matematisk forløb for siden at blive inddraget i modellering af biologiske og fysiske fænomener.

Logaritmefunktioner kan blive introduceret tidligt i forløbet, således at eleverne bliver fortrolige med funktionernes regnetekniske og skaleringsegenskaber og bliver i stand til at håndtere formler, hvor disse egenskaber anvendes som i pH-skalaen i kemi, i decibelskalaen i fysik eller Richterskalaen i geografi.

I forbindelse med funktioners grundlæggende egenskaber, skal eleverne bl.a. kende følgende:

- Definitions- og værdimængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema samt eventuelle asymptoter.
- Sammenhængen mellem graden af et polynomium og antallet af rødder
- Diskriminanten for et andengradspolynomium og dens betydning for toppunkt og antal rødder
- Betydningen af konstanterne $a$, $b$ og $c$ i andengradspolynomiet $P(x) = ax^2 + bx + c$
- Betydningen af konstanterne $a$ og $b$ i den eksponentielle funktion $f(x) = b \cdot a^x$ og omskrivningen mellem udtrykket $a^x$ og udtrykket $e^{kx}$
- Begreberne fremskrivningsfaktor, vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant
- Regneregler for logaritmefunktioner
- Betydningen af konstanterne $a$ og $b$ i potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$
- Sammenhængen mellem procentisk vækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner
- Periodicitet for sinus og cosinus

g) *grafisk fremstilling af datamateriale, lineære modeller, eksponentielle modeller og potensmodeller samt anvendelse af regression,*

Enkelt- og dobbeltlogaritmisk papir introduceres, og anvendelsen eksemplificeres.
Styrker og svagheder ved regressionskoefficienten kan diskuteres. Ved påvisning af eksponentiel- eller potenssammenhæng arbejdes med afbildning af funktioner i logaritmiske koordinatsystemer.

h) *definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginal-betragtninger, afledet funktion for de ovenfor nævnte funktioner samt regnereglerne for differentiation af* $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$, $f/g$ *og* $f \circ g$, Begreberne kontinuitet og grænseværdi skal ikke gives en selvstændig behandling. I forbindelse med begrebet differentialkvotient skal begrebet grænseværdi inddrages i det omfang det er nødvendigt for at kunne gennemføre de matematiske argumenter der hører til emnet. Differentialkvotientens fortolkning som hældningskoefficient for tangenten til grafen for en funktion $f$ i et givet punkt behandles ligesom tangentligningen skal udledes.

i) *monotoniforhold, globale og lokale ekstrema, optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient,*

Begrebet kontinuitet skal behandles i det omfang der er nødvendigt for at kunne bruge $f'(x)$ til at bestemme monotoniforhold samt lokale og globale ekstrema. Med udgangspunkt i praktiske problemstillinger anvendes differentialkvotienten til at finde maksimums- og/eller minimumsværdier. Et eksempel kunne være at en coladåse med fast volumen 0,33cl skal designes således at overfladearealet bliver mindst muligt. Hvordan skal dåsen dimensioneres, og hvilken rolle spiller differentialregning?

j)*stamfunktion for polynomier, eksponentielle funktioner, logaritmefunktioner, potensfunktioner, samt de trigonometriske funktioner cosinus og sinus; ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af* $f+g$, $f-g$ *og* $k\cdot f$ *samt integration ved substitution, sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer,*

Eleverne forventes at kunne beregne arealer i situationer hvor en del eller hele grafen ligger under x-aksen, ligesom arealer afgrænset af to grafer indgår. Arealbestemmelse omfatter også arealer afgrænset af stykkevis definerede funktioner, hvorfor eleverne skal have kendskab til indskudssætningen. It-værktøjer anvendes til at visualisere afgrænsede områder og om muligt visualisering af omdrejningslegemer. Omdrejningslegemers volumen omfatter både med hensyn til x- og y- aksen.

k)*lineære differentialligninger af 1. orden, logistiske differentialligninger og 2. ordens differentialligningen* $y'' = k$*; opstilling af simple differentialligninger.*

Ved hjælp af praktiske eksempler og modeller, argumenteres for relevansen af differentialligninger. Forskellige metoder til løsning af differentialligninger gennemgås, herunder separation af variable. Følgende lineære differentialligninger af 1.orden skal gennemgås:

- $y' = ky$
- $y' = b + ay$
- $y' = y(b - ay)$

Det forventes, at eleverne kan opstille simple differentialligninger på baggrund af tekstoplysninger. Det kan for eksempel være: ”Det vides at $f'(x)$ er proportional med $f(x)$, og proportionalitetsfaktoren er 0,5. Opstil på denne baggrund en differentialligning som $f'(x)$ må opfylde”.

### *3.3 Supplerende stof*

*Eleverne vil ikke kunne opfylde læringsmålene alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i matematik A skal udfylde ca. 25 pct. af fagets timetal. Det skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole. Eleverne skal gennem arbejdet med det supplerende stof erkende, at matematiske tankegange og metoder kan anvendes i samspil med andre fag og opnå erfaring med identifikation af problemstillinger, opstilling af modeller samt løsning af disse. Det supplerende stof skal ligesom kernestoffet i videst muligt omfang perspektiveres til grønlandske og internationale forhold.*

Da den enkelte skole udbyder forskellige studieretninger, anbefales at der vælges forløb som underbygger den valgte studieretning. Det er ved hjælp af det supplerende stof at man virkelig kan motivere eleverne og lade dem have medindflydelse på deres skolegang.

*Det supplerende stof skal blandt andet omfatte sammenhængende forløb med vægt på:*

*a) bearbejdning af talmateriale fra andre fagområder eller kilder, herunder anvendelse af mindst en statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model,*

Her kunne eksempelvis inddrage datamateriale fra erhvervsøkonomi, samfundsfag, idræt, biologi eller fysik. Se afsnit 6.1 og 6.2 for inspiration.

*b) ræsonnement og bevisførelse og*

Her kunne man lave et forløb med sigte på at gennemgå et eller flere centrale beviser indenfor et af matematikkens områder. Man kunne for eksempel inddrage et forløb, hvor man i detalje beviser analysens fundamentalsætning.

*c) matematisk modellering, herunder differentialligningsmodeller.*

Her kunne man eksempelvis se på en model for afkøling. Man ved fra kriminalsager, at dødstidspunktet for et offer med en vis sikkerhed kan fastslås ved at måle afdødes nuværende temperatur. For et autentisk materiale kan man for eksempel se på en nyligt afdød sæl, måske i samarbejde med biologi, eller man kan måle på afkølingen af en kande varmt vand i samarbejde med fysik. Den matematisk opstillede model kan testes mod de målte data (det varme vand). Den kan også anvendes til at anslå sælens dødstidspunkt, hvis man ikke kender det i forvejen. Her kan Newtons afkølingslov inddrages. Se afsnit 6.1 og 6.2 for inspiration.

*Endvidere skal der indgå mindst et af nedenstående emner:*

Nedenfor gives en række forslag, men man kan sagtens selv sammensætte et forløb indenfor et selvvalgt område, ligesom man frit kan vælge blandt punkterne d), e) og f).

*d) matematisk-historisk emne,*

Her kunne man eksempelvis vælge:

- Keglesnit
- Parameterkurver
- Komplekse tal
- 2.ordens differentialligninger
- Græske matematikeres og filosoffers indflydelse på nutidens matematik
- Matematikken på Newtons tid
- Matematikken på babyloniernes tid
- Klassisk geometri og trigonometri

*e) matematisk-økonomisk emne, eller*

Her kunne man eksempelvis vælge:

- Kvadratisk optimering
- Udvidet statistik
- Annuitetsregning
- Lineær programmering

*f) matematisk-teknisk emne*

Her kunne man eksempelvis vælge:

- Komplekse tals anvendelse i elektronik
- Differentialligninger i bygningsteknik
- Geometriske og trigonometriske beregninger i plane og rumlige figurer
- Trigonometriske funktioner og beskrivelse af tidevand.
- Trigonometriske funktioner og elektronikkredsløb

## *4. Undervisningens tilrettelæggelse*

### *4.1 Didaktiske principper*

*a) Undervisningen skal tage udgangspunkt i elevernes faglige niveau og viden.*

Det er væsentligt at udgangspunktet tages i elevernes faglige forudsætninger fra folkeskolen i Grønland, og at det ikke antages at niveauet i Danmark og Grønland er ens. Der skal tages hensyn til den enkelte elev, og det kan ikke antages at klassen har samme faglige niveau.

*b) Undervisningen tilrettelægges så den i videst muligt omfang har karakter af en læringsdialog mellem lærer og elever.*

Læreren må differentiere sin undervisning, så hver elev får bedst muligt udbytte.

*c) Undervisningen tilrettelægges, så der veksles mellem forskellige undervisningsformer.*

I nogle sammenhænge er det nødvendigt at se matematikken opbygget aksiomatisk med definitioner, sætninger og beviser. I andre sammenhænge er det vigtigt, at eleven selv søger, bearbejder og anvender informationer og selv reflekterer således at læring opnås.
Det vil være hensigtsmæssigt, at undervisningen i starten er meget præget af induktive metoder. Således føler eleven behov for at få ny viden, hvilket berettiger at nyt stof må introduceres. Senere i forløbet sker en udvidelse af den tid der anvendes til deduktiv undervisning. Der sigtes mod undervisningsformer med maksimal elevaktivitet.

*d) Undervisningen tilrettelægges, så elevernes interesser og behov tilgodeses, så eleverne får mulighed for at opleve faget som spændende, relevant og vedkommende.*

Et middel til dette, kan være at bryde stereotypen ”læreren står ved en tavle, eleverne sidder i hestesko/på rækker ved borde og lytter”. Eleverne må opleve forskellige læringsrum, og se læreren i forskellige roller – som sparringspartner, træner, konsulent osv. Der må være gruppearbejde, pararbejde, individuelt arbejde, fremlæggelser ved tavle, på plakater, ved skærmpræsentationer og lignende.

*e) Undervisningen tilrettelægges, så der både er faglig progression i de enkelte forløb og temaer såvel som progression i udvikling af fagsprog og terminologi, så eleven gradvist opøves i mere selvstændige arbejdsformer og kompleks tænkning.*

Det er vigtigt at der er progression fra den helt simple talbehandling til den mere komplicerede modellering, og det er vigtigt at arbejdsformerne varieres fra det lærerstyrede til det elevstyrede og at indholdet går fra det stoforienterede til det problemorienterede.

*f) Undervisningen tilrettelægges, så der i videst muligt omfang perspektiveres til det omgivende samfund.*

Eksempler kan handle om indlandsis, temperaturvariationer over en periode, populationer og andet fra Grønland. Undersøgelser tager så vidt muligt udgangspunkt i lokale data.

*Elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver skal stå i centrum for undervisningen.*

*Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved, at der tilrettelægges nogle forløb, der bygger på induktiv metode, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler. Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar forståelse af bevisets betydning i matematisk teori.*

*Der skal lægges stor vægt på matematikkens anvendelser, og eleverne skal indse, hvordan de samme matematiske metoder kan anvendes på vidt forskellige problemstillinger.*

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Som lærer må man være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning hver gang man tager fat på et nyt emne. Dette gælder i særlig grad i starten af 1. g. Den måde, matematikken præsenteres på i lærebøger, er ikke nødvendigvis den samme som den måde, eleverne lærer faget på. Uanset hvor man er i undervisningen, skal det altid overvejes, hvorledes it-værktøjer kan udnyttes til at støtte såvel færdighedsindlæring som den matematiske begrebsdannelse. Med CAS-værktøjer har man helt nye muligheder, idet eksperimentel tilgang nu er forholdsvist ukompliceret, da værktøjet kan udføre besværlige udregninger og tegne komplicerede diagrammer næsten øjeblikkeligt. På denne måde kan undervisningen tilrettelægges, så eleverne gennem en række forsøg erfarer sammenhænge, dernæst formulerer hypoteser og formodninger for endelig i slutningen af forløbet at bevise disse regler.

### *4.2 Arbejdsformer*

*I undervisningen skal der vælges varierede arbejdsformer, som bringer eleverne i en aktiv læringsrolle, og som gradvist øger kravene til elevernes selvstændighed. Der skal varieres i forhold* *til stoffet, men i høj grad også så der tages hensyn til forskellige elevtyper, deres læringsstile og behov. Både elever med undervisningssproget som førstesprog og som andetsprog skal tilgodeses. Der skal være progression i såvel arbejdsformer og faglige krav som i kravene til elevernes selvstændighed.*

*Arbejdsformerne skal organiseres, så eleverne stifter bekendtskab med klasseundervisning, individuelt arbejde, par- og gruppearbejde. Projektorienteret arbejde og temaopgaver skal indgå som en naturlig del af undervisningen, særfagligt eller i samarbejde med andre fag.*

*Mundtlig fremstilling og skriftligt arbejde skal indgå i undervisningen for at styrke elevernes fagsprog og udtryksform samt støtte deres udvikling af refleksion og evne til kompleks tænkning. Det skriftlige arbejde omfatter opgaveregning, problemløsning, projektrapporter samt andre former for skriftligt arbejde, herunder en mindre redegørelse for et emne eller tema i tilknytning til et undervisningsforløb. Arbejdet foregår både i undervisningen og som hjemmearbejde.*

*It og CAS-værktøjer skal indgå som hjælpemiddel i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende værktøjerne til at udføre mere komplicerede beregninger, til håndtering af større datamængder og til at skaffe sig overblik over grafer.*

Skriftligt arbejde kan omfatte udarbejdelse af:
- journal/logbog
- afleveringsopgaver
- træningsøvelser
- Projektrapport
- It-præsentation
- Prøver/test

Det kan være en fordel at læreren ikke blot udarbejder en plan for gennemførelse af det faglige stof, men også planlægger de undervisnings- og arbejdsformer han vil bruge; hvornår og hvordan. Dette er en hjælp til at huske at få det gjort når først skoleåret er i fuld gang.

### *4.3 Fagsprog*

*Undervisningen skal tilrettelægges, således at der arbejdes systematisk med udvikling af elevernes fagsprog og forståelse og anvendelse af fagets terminologi. Undervisningen skal tilrettelægges, så eleverne gradvis opnår en sikkerhed i forståelse og brug af før-faglige begreber.*

Før-faglige begreber er de ord eller termer, som læreren eller det faglige materiale, bruger til at forklare de centrale grundbegreber og termer i faget med. Det kunne være ord eller termer som: definere, konkludere, argumentere, redegøre, analysere, bevise, udlede m.m. Det skal her påpeges, at der i denne forbindelse selvfølgelig ikke menes de obligatorisk faglige grundbegreber, som definitionsmængde, værdimængde, løsningsmængde osv., som eleverne gennem deltagelse i undervisningen selvfølgelig må forventes at forstå betydningen og anvendelsen af.

### *4.4 Samspil med andre fag*

*Undervisningen skal tilrettelægges, så der i perioder arbejdes tværfagligt og drages paralleller til andre fags vidensområder.*

*Når matematik A indgår i en studieretning, skal dele af det faglige stof vælges, så det giver mulighed for en styrkelse af det faglige samspil i studieretningen. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.*

Adskillige andre fag anvender matematik til problemløsning. Der kan opnås gode resultater ved at flere fagområder kombineres, og eleven ser helheden i sin skolegang, og ikke blot betragter de enkelte fag som adskilt og indbyrdes uafhængige.
Eksempelvis kan der sammen med kemi gennemføres forløb om pH-værdi og logaritmer. I samarbejde med fysik kan gennemføres forløb om afkøling og eksponentielle funktioner.
Se afsnit 6.1 og 6.2 for eksempler på tværfagligt samarbejde.

***5. Evaluering***

***5.1 Løbende evaluering***

*Fagets læringsmål og faglige indhold er grundlaget for den løbende evaluering.*

*Den individuelle evaluering tager udgangspunkt i elevens indsats og faglige niveau i den daglige undervisning og i det skriftlige arbejde. Evalueringen giver baggrund for en vurdering af, om der er behov for ændringer af elevens arbejdsindsats og arbejdsmetode, herunder samarbejde med andre elever.*

Til udvikling af bl.a. studiekompetence kan det anbefales at afholde individuelle evalueringssamtaler, hvor det faglige niveau og undervisningen diskuteres, og en handlingsplan for faglig udvikling fastlægges. Undervisningen kan efterfølgende justeres, så der tages størst mulig højde for elevernes forskellige måder at lære på. Hvor der er tale om en progression i kravene til præstationerne, bør evalueringen af det forrige forløb afsluttes med en præcisering af på hvilke områder, der stilles større forventninger til eleven i den kommende periode. Til registrering af aftaler m.m. med eleven/holdet kan læreren anvende en portfolie.

*Den kollektive evaluering tager udgangspunkt i den daglige undervisning. Her vurderer lærer og elever i fællesskab, om der er behov for justeringer og ændringer af arbejdsformer mm., således at fagets læringsmål opfyldes.*

Dette kan gøres ved en samtale i klassen. Erfaringen viser at dette begrænser hvor åbne eleverne tør være, og/eller at det er de mest udadvendte eller de bedst dansk-talende der dominerer.
Der kan laves en skriftlig evaluering, med afkrydsning ”tilfredshedsniveau” af konkrete spørgsmål.
Der kan også laves åbne skriftlige evalueringer, hvor eleverne frit kan skrive sine tanker.
Evaluering kan omfatte elevernes tilfredshed med de anvendte lærebøger, it-værktøjer, undervisningsformer, arbejdsbelastning mm.

***5.2 Prøveformer***

*Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.*

*Skriftlig prøve*

*Skolen vælger ved skoleårets begyndelse for hvert hold en af følgende to prøveformer:*

*Prøveform a*
*Skriftlig prøve på grundlag af et centralt stillet opgavesæt. Prøvens varighed er 5 timer. Opgavesættet består af opgaver stillet inden for kernestoffet.*

*Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation.*

Der kan være opgaver hvor eleverne i et delspørgsmål skal anvende resultatet af et tidligere delspørgsmål. I den forbindelse er det vigtigt at eleverne fortælles at hvis de mangler et sådant resultat, kan der stadig opnås delvis eller fuld besvarelse for senere delspørgsmål, ved at komme med et fornuftigt forslag til et svar, der kan arbejdes videre med. Eleverne skal også informeres i undervisningen om at brugen af CAS ikke betyder at mellemregninger helt udelades. Elevens tankegang skal stadig tydeligt fremgå, eksempelvis ved mellemregninger og argumenter i tekst.

*Prøveform b*
*Skriftlig prøve på grundlag af et centralt stillet opgavesæt. Prøvens varighed er 5 timer. Opgavesættet består af opgaver stillet inden for kernestoffet.*

*Prøven er todelt. Første delprøve skal besvares uden brug af andre end særligt tilladte hjælpemidler, der i forvejen er meddelt eleverne. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf.*

*Under den anden del af prøven er opgaverne udarbejdet ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation.*

Der kan være opgaver hvor eleverne i et delspørgsmål skal anvende resultatet af et tidligere delspørgsmål. I den forbindelse er det vigtigt at eleverne fortælles at hvis de mangler et sådant resultat, kan der stadig opnås delvis eller fuld besvarelse for senere delspørgsmål, ved at komme med et fornuftigt forslag til et svar, der kan arbejdes videre med. Eleverne skal også informeres i undervisningen om at brugen af CAS ikke betyder at mellemregninger helt udelades. Elevens tankegang skal stadig tydeligt fremgå, eksempelvis ved mellemregninger og argumenter i tekst.

*Mundtlig prøve*
*Prøven afholdes på grundlag af opgaver, der skal være kendt af eleverne inden prøven. Opgaverne skal hver for sig indeholde et overordnet emne og indeholde et antal spørgsmål. Opgaverne skal*

*tilsammen dække såvel kernestof som supplerende stof. De gennemførte projektforløb og temaopgaver med tilhørende elevrapporter skal inddrages i opgaverne.*

*Der gives ca. 30 minutters forberedelsestid, og eksaminationstiden er ca. 30 minutter pr. eksaminand.*

*Prøven er todelt. Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på de spørgsmål, der er indeholdt i opgaven, og uddybende spørgsmål fra eksaminator. Anden del former sig som en samtale mellem eksaminand og eksaminator med udgangspunkt i opgavens overordnede emne.*

Det er vigtigt at eleverne gøres klart hvordan forberedelsestiden bedst udnyttes. Eksempelvis vil det næppe forbedre elevens præstation at medbringe lange og mange notater. Oplæsning af papir eller powerpoint-præsentation fortæller heller ikke meget om elevens kundskaber. Naturligvis kan eleven støtte sig til en PC ved visualisering af løsning af en problemstilling, hvis eleven finder det relevant.

### *5.3 Bedømmelseskriterier*

*Bedømmelsen af både den skriftlige og den mundtlige prøve foretages ud fra, i hvor høj grad eksaminanden opfylder fagets læringsmål.*

*Ved den skriftlige prøve lægges vægt på at eksaminanden kan:*
*a) opstille, anvende og vurdere matematiske modeller og metoder til problemløsning,*
*b) anvende it-hjælpemidler på en hensigtsmæssig måde,*
*c) anvende fagets terminologi og*
*d) formidle ræsonnementer og resultater.*
*Der gives en karakter på grundlag af en helhedsvurdering af den skriftlige præstation.*

*Ved den mundtlige prøve lægges vægt på at eksaminanden kan:*
*a) gøre rede for et matematisk emne,*
*b) gennemføre matematiske ræsonnementer,*
*c) anvende fagets terminologi og metoder og*
*d) formidle fagligt stof.*
*Der gives en karakter på grundlag af en helhedsvurdering af den mundtlige præstation.*

I skrivende stund, benyttes 7-trinsskalaen GGS i Grønland. Yderligere info om karakterskalaen kan findes på internettet.
Karakterskalaen er karakteriseret ved at operere med et fejl- og mangelbegreb. Man skal altså bedømme i hvor høj grad en elev har opnået slutmålene for faget.

Nedenfor er angivet retningslinjer for opnåelse af karaktererne 12, 7 og 02 i matematik A.

Beskrivelsen er naturligvis ikke udtømmende, og man skal derfor ved bedømmelsen fokusere på i hvor høj grad eleven har opnået de kompetencer, der er beskrevet i afsnit 3.1 (læringsmål). Beskrivelsen kan hjælpe læreren til løbende vurdering af elevernes standpunkt, og hvad der kræves af skriftlige afleveringer, samt sikre at det rette niveau nås.

| **Karakter** | **Beskrivelse** | **Matematik A - skriftlig** |
|---|---|---|
| 12<br>Den fremragende præstation | Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller kun få uvæsentlige mangler | I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet korrekt og hensigtsmæssigt. Hvor det er relevant er løsninger og modeller vurderet. Besvarelsen er veldokumenteret med sikker brug af figurer og symbolsprog.<br>Der demonstreres stort fagligt overblik på alle felter og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres sagligt for de anvendte løsningsmetoder.<br>Eksaminanden behersker fagets terminologi og kan skifte mellem forskellige repræsentationsformer.<br>Kommunikationsværdien er meget høj, idet der på en naturlig måde skiftes mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.<br>I besvarelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler. |
| 7<br>Den gode præstation | Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler | I besvarelsen benyttes matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – på en fornuftig måde.<br>Der demonstreres et solidt og bredt fagligt overblik, og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres i et vist omfang for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er dokumenteret med en god brug af figurer og symbolsprog.<br>Eksaminanden er delvist i stand til at opstille og behandle matematiske modeller og vurdere løsningerne.<br>Kommunikationsværdien er god, idet eksaminanden kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og |

| | | |
|---|---|---|
| | | almindeligt skriftsprog. Eksaminanden behersker fagets terminologi og har et godt kendskab til sammenhængen mellem forskellige repræsentationsformer.<br>I besvarelsen forekommer adskillige fejl og mangler. |
| 02<br>Den tilstrækkelige præstation | Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål | I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet på et meget elementært niveau. Matematiske ræsonnementer anvendes usikkert og usammenhængende.<br>Dokumentationen er mangelfuld med ringe brug af figurer og symbolsprog.<br>Der demonstreres et beskedent fagligt overblik og eksaminanden har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.<br>Eksaminanden er i ringe grad i stand til at opstille og behandle simple matematisk modeller, men kan løse elementære opgavetyper. Anvendelsen af fagets terminologi er usikker.<br>Kommunikationsværdien er beskeden, idet eksaminanden kun i mindre udstrækning kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. |

| Karakter | Beskrivelse | Matematik A - mundtlig |
|---|---|---|
| 12<br>Den fremragende præstation | Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller kun få uvæsentlige mangler | Fremstillingen er velstruktureret og fagets terminologi anvendes sikkert. Der veksles problemfrit mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer meget stor fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden viser et stort overblik på alle felter samt evne til at generalisere. Hvor det er relevant veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.<br>Ved fremlæggelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler. |
| 7<br>Den gode præstation | Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler | Fremstillingen er godt struktureret, og fagets terminologi benyttes. Der veksles på tilfredsstillende måde mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer en vis fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden har et godt overblik på mange områder og kan i nogen grad generalisere. Der veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.<br>Ved fremlæggelsen forekommer adskillige fejl og mangler. |
| 02<br>Den tilstrækkelige præstation | Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål | Fremstillingen er ustruktureret. Eksaminanden behersker kun mangelfuldt fagets terminologi og skifter usikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog, samt mellem forskellige repræsentationsformer. Eksaminanden demonstrerer en beskeden fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse – hvor væsentlige argumenter udelades. I stedet vises eksempler på konkrete anvendelser. Eksaminanden har et mangelfuldt overblik og har kun kendskab til en begrænset del af stoffet. |

### 6.1 Eksempler på projekter og temaopgaver

1. Simulering af radioaktivt henfald

Materialer: Et stort antal terninger, mindst 100.

Forudsætning: En terning (kerne) er henfaldet hvis udfaldet for eksempel bliver en 6'er.

Fremgangsmåde: Lad en elev kaste med 100 terninger og lad en anden fjerne 6'erne mens en tredje elev noterer sig antal tilbageværende terninger (kerner). Dette gentages ca. ti gange.

Antal tilbageværende terninger afbildes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem som funktion af antallet af kast. Hvordan ser grafen ud? Tegn bedste rette linje og bestem eventuelt en regneforskrift.

Gentag eventuelt eksperimentet ved at fjerne både 5'ere og 6'ere efter hvert kast.

Denne lille temaopgave kan lægges i starten af et forløb med eksponentiel udvikling.

Niveau: C

2. Det gyldne snit

Dette lille forløb kan laves sammen med billedkunst og lægges i forbindelse med gennemgang af andengradsligningen.

I matematik defineres det gyldne snit og det bestemmes ved løsning af en given andengradsligning. Der kan gives eksempler på, hvor man i matematikken finder det gyldne snit. Hvis trigonometri er gennemgået kan man se på et bevis for, at forholdet mellem en diagonal og en side i en pentagon er lig med det gyldne snit.

I billedkunst kan man se hvor det gyldne snit er anvendt i kunst og arkitektur. Ud fra kopier af konkrete kunstværker kan eleverne indsætte gyldne snit på værket og drage konklusioner derfra.

En god webadresse: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html

Niveau: B

3. Matematikken i et strengeinstrument

Dette projekt har både en eksperimentel og en teoretisk del. Man kan eventuelt vælge en af delene.
Materialer: Et strengeinstrument, gerne en guitar, og et målebånd.
Eksperimentel del: Lad eleverne måle længden af en løs streng fra stol til hoved, hvilket også kan kaldes bånd nr. 0. Dernæst måles afstanden fra stol til bånd nr. 1. Således fortsættes med et passende antal bånd. Målingerne indsættes i et skema og længden som funktion af båndnummeret indsættes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, for eksempel i programmet Graph, og en regneforskrift bestemmes ved eksponentiel regression.

Den teoretiske del anvender emner fra både musik og fysik. Disse kan enten blive refereret til eller man kan lave et tværfagligt forløb sammen med musik og fysik.

Bidrag fra musik: Toneskala, tonernes navne, oktav, overtoner, den veltempererede skala.

Bidrag fra fysik: Frekvens $f$, bølgelængde $\lambda$, svingninger, stående bølger, grundsvingning, overtoner, den svingende streng, $\lambda \cdot f$ = konstant for en given streng med fast stemning, bestemmelse af frekvens for svingende streng ved hjælp af stroboskoplampe.

Teoretisk del: Grundlaget for den matematiske behandling er den veltempererede skala, som er dannet ved at forholdet mellem frekvenserne for to på hinanden følgende toner er konstant, samt at der gælder $\lambda \cdot f$ = konstant. Herved kan en forskrift for afstanden fra stolen til det $n$'te bånd findes. Sammenlign forskriften med den fundet i den eksperimentelle del.

Niveau: B

4. Afkøling med anvendelser

I mange kriminalfilm ser man retsmedicinere forsøge at bestemme dødstidspunktet for en afdød ved at måle den øjeblikkelige legemstemperatur. Men hvordan kan denne temperatur hjælpe med til bestemmelse af dødstidspunktet? Det skal dette projekt søge at belyse.

Først laves et lille eksperiment, hvor der måles på en kande med opvarmet vand. Rumtemperaturen måles med et termometer. Derpå måles temperaturen af vandet i kanden og et stopur startes. Temperaturen af vandet i kanden måles nu med jævne tidsrum, tid og temperatur indføres i et skema. Der laves en ekstra søjle eller række i skemaet hvor forskellen mellem den målte temperatur og rumtemperaturen noteres. Forsøges stoppes når den målte temperatur er nær rumtemperaturen.

Der laves eksponentiel regression på forskellen mellem vandtemperatur og rumtemperatur og den målte tid. En forskrift for vandets temperatur som funktion af tiden skrives op ved hjælp af den anvendte regression. Hvordan kan rumtemperaturen og vandets begyndelsestemperatur findes af forskriften?

Temperaturen af vandet, $T(t)$, kan således bestemmes af et udtryk $T(t) = T_0 + b \cdot a^t$, hvor $T_0$ betegner rumtemperaturen.

En krop består hovedsageligt af vand, så ovenstående model kan anvendes som en approksimation.

Konkret bestemmelse af dødstidspunkt: Hvis der er muligt, så kan man kontakte en fanger som har skudt en sæl. Mål rumtemperaturen, eller omgivelsernes temperatur hvis det foregår udenfor. Mål derpå sælens indre temperatur (spørg fangeren eller en biologilærer om assistance) og notér tidspunktet, $t_1$. Vent et stykke tid, måske omkring en time, og mål den indre temperatur igen og notér tidspunktet $t_2$. Tallene $a$ og $b$ bestemmes ud fra de to målinger foretaget på sælen.

Spørg en biologilærer om kropstemperaturen for en sæl. Kaldes denne $T_K$, findes dødstidspunktet for sælen som $t_{død} = t_1 - t_K$, hvor $t_K$ er løsning til ligningen $T(t) = T_K$.

Det er muligt at lave et tværfagligt forløb med biologi. Her kan man se nærmere på mere præcise metoder til bestemmelse af dødstidspunkter. Eventuelt kan man søge oplysninger hos Retsmedicinsk Institut i København.

I episoden " Assistancemelding A-6/01" fra tv-serien Rejseholdet høres retsmediciner Jan Boysen bruge følgende tommelfingerregel: Kroppens temperatur hos en afdød aftager med 1,5 °C i timen.

Kommentér Boysens tommelfingerregel. Hvilken model bruger han?

Den pågældende episode fra Rejseholdet kan vises på et tidspunkt i forløbet.

Niveau: B

5. Matematikken i Per Nørgårds Rejsen ind i den gyldne skærm

Dette forløb er ganske kort og lægger op til samarbejde mellem matematik og musik.

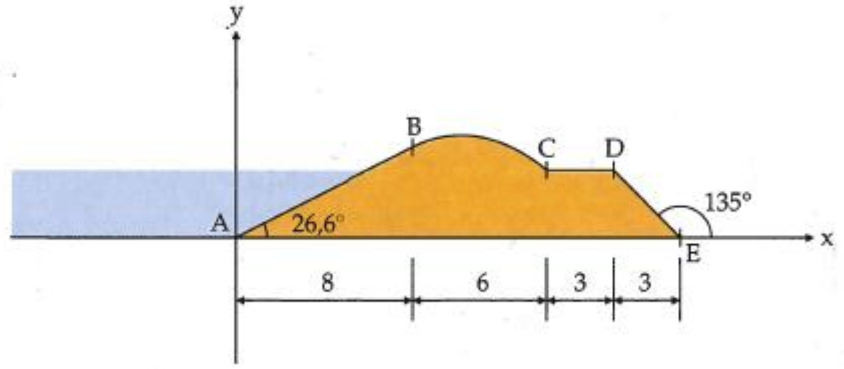
Eleverne finder begrebet "uendelighedsrækken" på nettet. De skal forklare hvordan denne dannes rekursivt. I stykket Rejsen ind i den gyldne skærm anvender Per Nørgård netop denne række. Musiklæreren kan uddele noder til stykket og eleverne kan finde den matematiske struktur fra uendelighedsrækken ved at tælle takter. Forløbet afsluttes med at lytte til stykket.

Forslag til websted: http://www.pernoergaard.dk/eng/strukturer/uendelig/ukonstruktion.html

Niveau: B

6. Et dige

På studietur til Holland, besøger klassen et område ved havet. Der skal bygges et dige for at undgå at ændring i vandstand på grund af tidevand giver oversvømmelse. Man har allerede besluttet at diget skal have tværsnit som vist på grafen.




Vi bliver bedt om at lave nogle beregninger for byggefolkene. Først bliver vi enige om følgende:

- Strækningen AB er en ret linje
- Strækningen BC er formet som en del af en parabel
- Strækningen CD er en vandret og ret linje
- Strækningen DE er en ret linje
- Der skal være en "glat" overgang fra den rette linje AB og parabeldelen BC

Vi antager at x-aksen er bundlinje for havet. Begge akser (x og y) har enheden meter [m].

a) Hvor høj må vandstanden være, før havet løber over diget?

Vi oplyses at diget har en længde på 100 meter, og endefladerne er parallelle og lodrette.

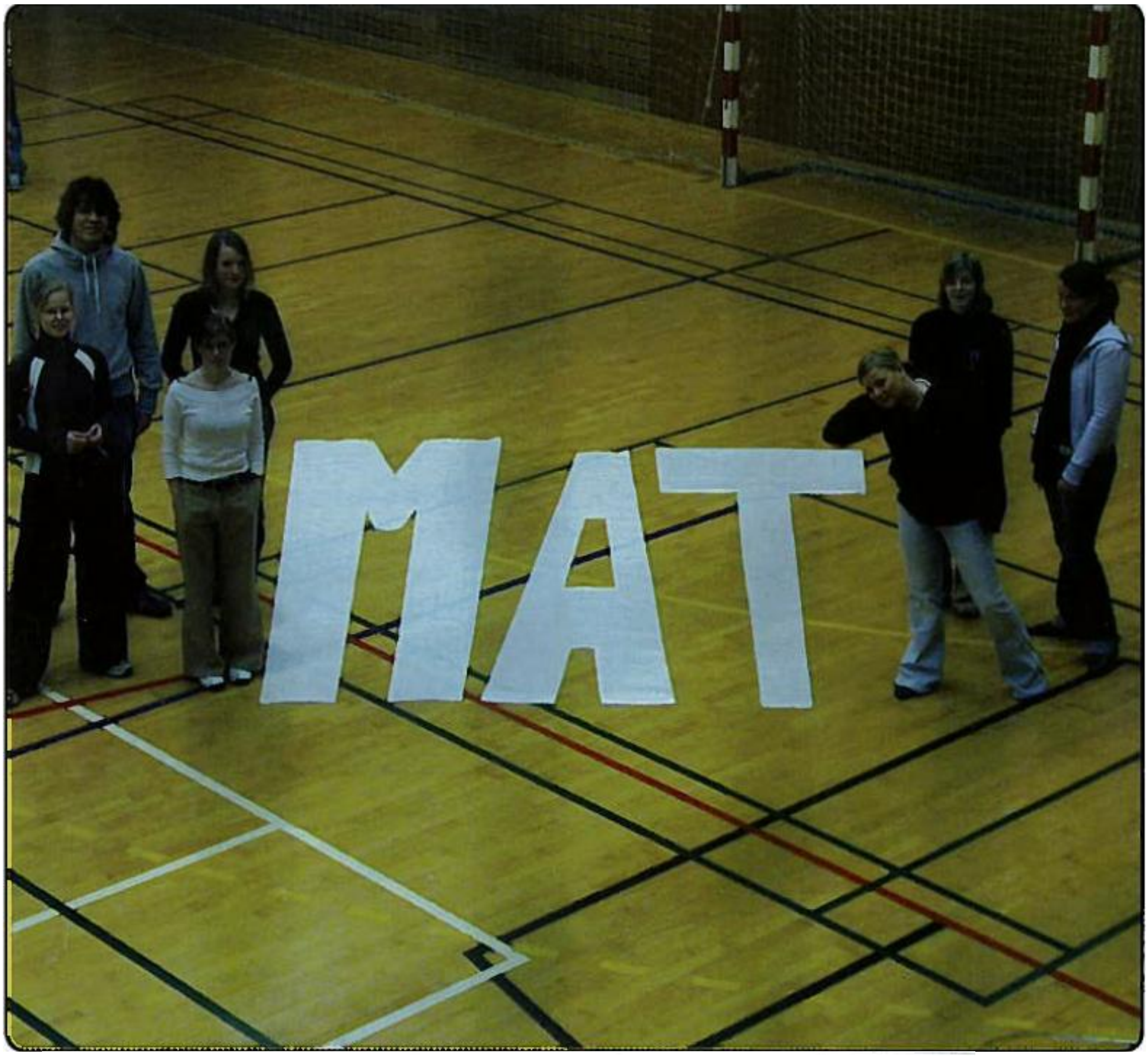
b) Hvad er rumfanget af den materialemængde der skal bruges til at bygge diget?

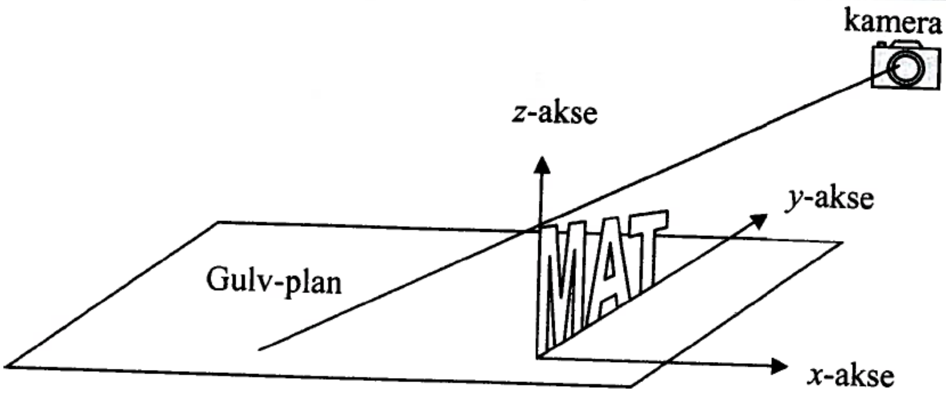
Lav rapport over projektet. Husk at argumentere for dine metoder og modellens begrænsninger.

Projektet kan udbygges, så det kommer til at indeholde en model for tidevand.

Niveau: B (A hvis tidevand tages med)

7. Bogstaver



Har I set en håndboldkamp i tv, hvor reklamebogstaverne der er klæbet på hallens gulv ser ud til at stå lige lodret op fra gulvet?
Det ser ud som om at spillerne vil snuble, hvis de løber hen over bogstaverne, men det er selvfølgelig bare synsbedrag.

I skal nu fremstille 3 bogstaver med samme effekt.
Gå sammen i grupper på 2.
Bogstaverne klippes ud af en papirdug. I vælger et gulv at placere papirbogstaverne på og et passende sted for kamerapositionen.

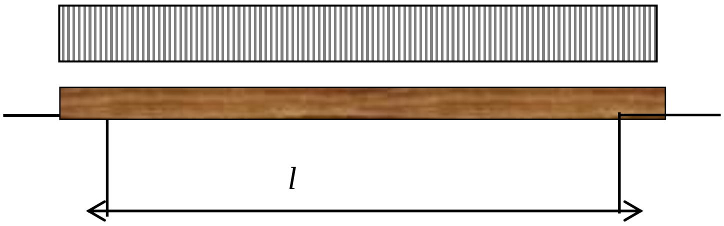
- Design de valgte 3 bogstaver.
- Indfør et 3-dimensionalt koordinatsystem, fastlæg nulpunktet, Origo.
- Bestem koordinaterne til alle de punkter, der er nødvendige for at karakterisere det valgte bogstav, når man forestiller sig, at det står oprejst.
- Bestem koordinaterne til ”kamerapositionen”.
- Opstil en parameterfremstilling for alle de linier, der går gennem bogstavpunkterne og kamerapunktet.
- Opstil en ligning for gulvplanen og beregn skæringspunkterne mellem gulvplanen og alle de fremkomne linier.

Udover en projektrapport afsluttes med et fotografi af bogstavvirkningen.

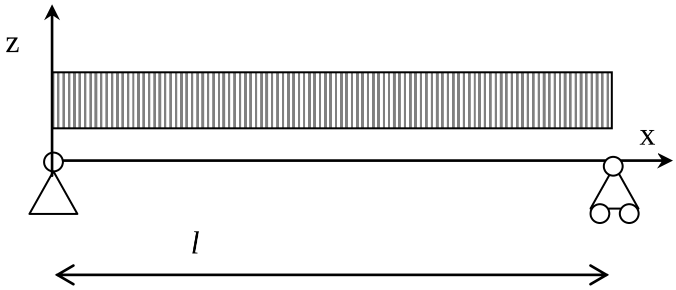
Niveau: A

# 8. Limtræsbjælken

En træbjælke med en spændvidde på $l$ [mm] er belastet med en jævn fordelt belastning $p$ [kN/m].




*Statisk model*




Der skal nu foretages en dimensionering af bjælken ud fra en undersøgelse af bæreevnen og nedbøjningen.

Træbjælken skal være af limtræ, kvalitet L40, K-last

Den regningsmæssige belastning på bjælken er $S_d = 4{,}50$ kN/m.

Spændvidden er $l = 5000$ [mm].

Træets elasticitetskoefficient $E$ [MPa] og træets regningsmæssige bøjningsstyrke $f_{m,d}$ [MPa] findes ved tabelopslag.

Bjælkens bæreevne kan findes ved at beregne tværsnittets såkaldte nødvendige modstandsmoment. [mm³]:

$$W_{nødv.} = \frac{M(x)_{maks.}}{f_{md}}$$

Bøjningspåvirkningen, momentet, i selve bjælken kan findes som løsning til differentialligningen:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -S_d$$

Momentet er nul ved understøtningerne. $M_{max}$ er det maksimale moment. [kN·m].

Bæreevnekravet er $W_{nødv} < W_y$, hvor *Wy* findes i limtrætabellen (Teknisk Ståbi)

*Find en limtrædimension, som overholder bæreevnekravet.*

Nedbøjningen af bjælken u(x) kan findes som løsning til differentialligningen:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

*I* [mm4] er bjælkens inertimoment eller stivhed. Nedbøjningen er nul ved understøtningerne.

*Beregn bjælkens maksimale nedbøjning* $u_{max}$.

Nedbøjningen for den karakteristiske snelast, $s_k$ = 1,3 [kN/m], må ikke overstige 1/300 af spændvidden. Det vil sige:

$$u_{maks} = \frac{1}{300} \cdot l \text{ [mm]}$$

I limtræstabellen regnes med inertimomentet *Iy*, da bjælken vil bøje om tabelfigurens *y*-akse.
*Kan den valgte bjælke fra bæreevnebestemmelsen klare nedbøjningskravet?*
*Hvis ikke, så vælg en passende dimension.*

Niveau: A

## 6.2 Webadresser

### 6.2.1 Nyttige adresser

Matematiklærerforeningen. Her findes bl.a. tidligere stillede eksamensopgaver i matematik fra før reformen i Danmark og fra Færøerne. Desuden findes en række nyttige links:

http://www.uvmat.dk/

Matematiksider på EMU. Her findes masser af inspiration til forløb, både særfagligt og tværfagligt:

http://www.emu.dk/gym/fag/ma/

PMHs interaktive javasider:

http://www.uvmat.dk/pmh/Ommatm.htm

Her kan hentes ideer til forløb med eksperimentel tilgang til matematik:

http://www.emu.dk/gym/fag/ma/XM/xmm-bog.pdf

Her kan hentes rapporter og ideer til modellering:

http://magenta.ruc.dk/nsm/uddannelser/gymnasielaerer/

Flemming Pedersens hjemmeside med forslag til temaopgaver og projekter samt andet godt:

http://www.fpmat.dk/

Vejledning stx DK. gammel:

http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF08/Vejledninger/stx/080701_matematik_A_stx_vejledning.ashx

Vejledning stx DK. ny:

http://www.uvm.dk/~/media/Files/Udd/Gym/PDF10/Vejledninger%20til%20laereplaner/Stx/100806_vejl_matematik_A_stx.ashx

### 6.2.2 Tværfagligt samarbejde

Samarbejde mellem matematik (statistik) og samfundsfag samt mellem matematik og biologi:

http://www.uvmat.dk/mabimasa/index.htm

http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/mat-samf/mat-samf.html

http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/mat-bio/mat-bio.html

Samarbejde mellem matematik og kemi:

http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/mat-kemi/fagsamarbejde-mat-kemi.pdf

### 6.2.3 Software.

På nedenstående adresser kan man hente små matematikprogrammer.

Graph:

http://www.padowan.dk/graph/Download.php

GeoGebra:

http://www.emu.dk/gsk/fag/mat/fagtema/geometri/geogebra.html

Deskriptiv statistik ver. 4.0:

http://eh-mat.dk/statstik.html

Vektorræs. Et sjovt online spil der kan bruges som indledning til vektorregning:

http://www.kongregate.com/games/GeometricGames/vector-race