

# Vejledning til læreplan i Matematik A, gux

Marts 2025

## Indholdsfortegnelse

0. Forord .....	3
1. Fagets rolle .....	4
2. Fagets formål .....	4
3. Læringsmål og indhold .....	5
3.1 Læringsmål .....	5
3.2 Kernestof og mindstekrav .....	5
3.2.1 Tal og formler .....	5
3.2.2 Procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring .....	6
3.2.3 Statistik .....	7
3.2.4 Regression .....	7
3.2.5 Kombinatorik og sandsynlighedsregning .....	8
3.2.6 Trigonometri .....	8
3.2.7 Analytisk plangeometri .....	9
3.2.8 Vektorregning .....	9
3.2.9 Funktioner .....	10
3.2.10 Monotoniforhold .....	11
3.2.11 Differentialregning .....	11
3.2.12 Matematiske modeller og modellering .....	12
3.2.13 Funktioner af to variable .....	12
3.2.14 Integralregning .....	13
3.2.15 Differentialligninger .....	13
3.2.16 Mindstekrav .....	13
3.3 Supplerende stof .....	15
3.3.1 Indekstal og annuitetsregning .....	15
3.3.2 Kombinatorik og sandsynlighedsregning .....	16
3.3.3 Vektorregning .....	17
3.3.4 Vektorfunktioner og banekurver .....	18
3.3.5 Ræsonnement og bevisførelse .....	18
3.3.6 Væksthastighed – et vigtigt begreb i matematiske modeller .....	19
3.3.7 Autentiske data .....	19

3.3.8	Matematikhistorie.....	19
4.	Undervisningens tilrettelæggelse .....	20
4.1	Didaktiske principper.....	20
4.1.1	Overgang og grundforløb .....	21
4.1.2	Ræsonnement .....	22
4.1.3	Problembehandling og modellering.....	22
4.1.4	Undersøgelserbaserede aktiviteter.....	23
4.1.5	Færdigheder .....	23
4.1.6	Formelsamling .....	24
4.1.7	Matematisk symbolsprog og kommunikation.....	24
4.1.8	Matematiske værktøjsprogrammer .....	24
4.1.9	Specielt om tilrettelæggelse mhp. træning frem mod de mundtlige prøver .....	24
4.2	Arbejdsformer .....	25
4.3	It.....	27
4.4	Fagsprog .....	28
4.5	Samspil med andre fag .....	28
5.	Evaluering .....	29
5.1	Løbende evaluering .....	29
5.1.1	Grundforløbsscreening .....	31
5.1.2	Årsprøver.....	31
5.2	Prøveformer .....	31
5.2.1	Den skriftlige prøve .....	31
5.2.2	Den mundtlige prøve .....	33
5.3	Bedømmelseskriterier .....	34
5.3.1	Bedømmelse: Den skriftlige prøve på guxA.....	34
5.3.2	Bedømmelse: Den mundtlige prøve på guxA .....	36
6.	Bilag.....	37
6.1	Bilag 1: Karakterbeskrivelser .....	37

## Indledning

Undervisningen i almindelighed reguleres af lov og bekendtgørelse for de gymnasiale uddannelser. De styredokumenter, der særligt bestemmer undervisningen i matematik A, stx, er

- læreplanen,
- denne vejledning til læreplanen,
- formelsamlingen for niveauet,
- vejledende opgavesæt til niveauet samt
- det akkumulerede sæt af eksamensopgaver stillet til ordningen.

Læreplanen udgør en ramme, inden for hvilken lærer og elever kan følge deres interesser og tilpasse undervisningens indhold og tilgange til eleverne og deres studieretning.

Vejledningen præciserer, kommenterer, uddyber og giver anbefalinger vedrørende udvalgte dele af læreplanens tekst, men indfører ikke nye bindende krav.

Citater fra læreplanen er anført i citationstegn med kursiv.

## 0. Forord

Med 2018-læreplanerne for matematik har der været en intention om at lægge sig tæt op ad de danske 2017-læreplaner. Nærværende undervisningsvejledning følger således på mange punkter den tilsvarende danske vejledning.

Der må ikke herske tvivl om at slutmålene for de grønlandske matematikniveauer er ækvivalente med de tilsvarende danske – og grønlandske elever skal således fagligt nå samme sted hen, selv om deres udgangspunkt ved indgangen til gymnasiet ikke altid ses at være på linje med danske elevers. Dette kan konstateres gennem de indledende screeninger i grundforløbet, og skolerne kan herefter sætte ind med fornødne tiltag, så matematikundervisningen kan få et tilstrækkeligt studieforberedende niveau. I forhold til tidligere læreplaner er der sket en faglig opstramning på baggrund af anbefalingerne i

Matematikkommissionens rapport fra 2017 (<https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/gym/pdf17/jan/170116-matematikkommissionen-afrapportering.pdf?la=da>).

Ræsonnementskompetencen, modelleringskompetencen og problemløsningskompetencen skal være centralt placeret i behandlingen af ethvert emne, parallelt med at elevens erfaringer med matematiske begreber og repræsentationer samt det matematiske symbolsprog udvikles og konsolideres i et aktivt skriftligt og mundtligt ordforråd.

Matematik på C-, B- eller A-niveau har mulighed for at indgå i faglige samarbejder med andre fag – bredt på B-niveau og smallere på C- og A-niveau. På C-niveau er der muligheder for samarbejde med dansk, samfundsfag og science, men også de kunstneriske fag idræt, musik og billedkunst er gode samspilspartnere for matematik. Matematik på B-niveau skal indgå i faglige samarbejder med de studieretningsfag, som eleven har på A-niveau, herunder biologi A, samfundsfag A, musik A og fortsættersprog A. På hold, der har matematik på B-niveau, er det derfor nødvendigt fra begyndelsen af studieretningsforløbet, at læreren retter henvendelse til kolleger, der underviser samme hold i studieretningsfagene, med henblik på at skitsere og tilrettelægge, hvad temaerne for de faglige samspil skal være, hvilken baggrundsviden det kræver, og hvor i det samlede forløb til B-niveau samspillet skal foregå. Når matematik på A-niveau optræder som studieretningsfag, kan de faglige samspil mellem studieretningsfagene nå en større dybde, og der er brug for løbende erfaringsudveksling mellem lærerne i fagene.

Matematik er i sit grundlag skriftligt. Enhver form for mundtlig matematik har altid et parallelt skriftligt sidespor – enten i form af symbolsk notation eller illustrationer. Dele af matematikken læres med papir og blyant som eneste redskaber, mens andre dele læres med brug af de utallige muligheder for at skrive, illustrere og eksperimentere med matematik, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder.

”Matematisk værktøjsprogram” dækker i nærværende undervisningsvejledning over et program eller en samling af flere programmer, der kan håndtere både CAS, dynamisk statistik og dynamisk geometri, hvor CAS henviser til kommandoer, der kan håndtere symbolsk (algebraisk) omskrivning, reduktion, formelhåndtering, ligningsløsning, differentiation og integration (ubestemt). Netop CAS-kommandoerne repræsenterer den algebra, som i simple tilfælde også skal kunne håndteres alene med papir og blyant.

Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.

På A-niveau skal der arbejdes med en centralt udmeldt formelsamling. Formelsamlingen er udgivet af UVM i samarbejde med Matematiklærerforeningen og kan hentes på [uvm.dk](http://uvm.dk). Eleverne skal have adgang til formelsamlingen under delprøve 1 ved den skriftlige prøve jf. afsnit 4.2.

Strukturen i undervisningsvejledningen følger generelt samme opbygning som læreplanen.

## 1. Fagets rolle

Nedenfor følger direkte citater fra læreplanen. Indholdet foldes i øvrigt ud gennem beskrivelser af læreplanens øvrige afsnit.

*”Faget bygger på abstraktion, logisk tænkning og ræsonnementer og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Faget beskæftiger sig både med teoretiske og anvendelsesorienterede emner. Fagets anvendelsesorienterede dimension består i, at der ved hjælp af matematiske teorier og modeller beskrives, analyseres og vurderes på tekniske, naturvidenskabelige, økonomiske og samfundsmæssige emner og relationer, alt efter den studieretning, som faget indgår i.”*

## 2. Fagets formål

Det teoretiske matematik A-niveau skal med hovedvægt på matematisk teori og metode samt overblik i modellering og problembehandling sætte eleverne i stand til at kunne sammenstille og udnytte matematisk viden og viden fra andre fag (særligt studieretningsfag) til at opnå en dybere indsigt i matematikkens indre strukturer og matematikkens beskrivelseskraft. Herigennem skal eleverne blive i stand til at kunne forholde sig kritisk til og vurdere andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige faglige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse med betydeligt matematikteoretisk indhold.

Niveauets karakteristika skal afspejles i undervisningens tilrettelæggelse.

## 3. Læringsmål og indhold

I læreplanens afsnit 3.1 er formuleret de læringsmål, som eleverne skal opnå gennem undervisningen i matematik på det aktuelle niveau. Læringsmålene danner grundlag for både skriftlige og mundtlige eksaminer. Læringsmålene udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 3.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 3.3. Læringsmålene uddybes gennem beskrivelsen af kernestof og supplerende stof i afsnit 3.2 og 3.3 nedenfor.

### 3.1 Læringsmål

Læringsmålene og det samlede faglige indhold bygger specielt på udvikling og styrkelse af elevernes ræsonnements-, modellerings- og problembehandlingskompetencer. I arbejdet med disse indgår udvikling af elevernes tankegangskompetence, symbol- og formalismekompetence samt repræsentationskompetence. I undervisningens tilrettelæggelse indgår desuden, at eleverne opnår kompetence til at kunne foretage bevidst hensigtsmæssigt valg af løsningsstrategi med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer. Eleverne skal igennem gymnasieforløbet have mulighed for at demonstrere og blive vurderet på deres opnåede matematikforståelse, hvorfor det også indgår i læringsmålene, at eleverne skal kunne kommunikere aktivt *i, med og om* matematik i både mundtlig og skriftlig formidling.

De særlige læringsmål, som eleverne skal opnå med henblik på den skriftlige prøve, er ud over beskrivelsen af kernestoffet udmøntet gennem de stillede opgavesæt.

Alle læringsmålene skal nås, og rækkefølgen er ikke udtryk for en prioritering af målene. Hvorvidt eleven har opfyldt fagets slutmål, undersøges ved de afsluttende prøver og i forbindelse med afgivelsen af de afsluttende standpunktskarakterer.

### 3.2 Kernestof og mindstekrav

Det er et gennemgående princip, at der med et nyt højere matematikniveau sker en uddybning af 'spor' fra det underliggende matematikniveau, og at der tilføjes helt nye faglige emner. I nedenstående gennemgang af kernestof samt supplerende stof vil fremhævet tekst markere, hvor A-niveau har tilføjelser til B-niveau.

Dele af kernestoffet på B-niveau og A-niveau indgår som valgmuligheder i det supplerende stof på underliggende niveauer. For hold, hvor nogle elever forventes at ville opgradere til et højere niveau, kan det således være hensigtsmæssigt at vælge supplerende stof, der på næste niveau vil indgå som kernestof.

#### 3.2.1 Tal og formler

Eleverne skal opnå en talforståelse, så de behersker regningsarternes hierarki og beregninger i almindelighed samt kan vurdere rimeligheden af fundne resultater. De skal trænes i at beherske overslagsregning, som bør forstås på den måde, at eleven inden udregning/ anvendelse af it-værktøj har en forventning om eller et bud på et muligt men ikke eksakt svar, og efter anvendelse af fx it-værktøj kan forholde sig til resultatet og kan reflektere over om facit stemmer overens med buddet/forventningen.

Elevernes talforståelse fra folkeskolen skal vedligeholdes og udvikles, fx bør eleverne opnå forståelse af, at det på trods af let adgang til lommeregner på; fx mobiltelefoner er en stor fordel i mange typer af beregninger umiddelbart at kunne aktivere den lille og den store tabel, især kvadrattal.

Eleverne skal kende betegnelserne for talmængderne  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  og  $\mathbb{R}$  samt forskellige repræsentationer af tal, herunder brøk, decimaltal og eksponentiel notation (talspotenser) og omskrivning mellem dem.

Eleverne skal kunne håndtere brøkregning, potensregler og parentesregler (herunder kvadratsætningerne), i det omfang de støder på dem i arbejdet med formler og ligningsløsning, mens mere komplicerede udtryk håndteres ved hjælp af CAS. Eleverne skal kunne forklare formler og anvende formler til beregning, og de skal selv kunne opstille nye formler ud fra allerede kendte.

Endvidere bør eleverne møde et argument for det udvidede potensbegreb, hvor de samtidig opnår en flig af indsigt i de reelle tals kompleksitet.

Begreberne ligefrem og omvendt proportionalitet er særligt relevante for de naturvidenskabelige fag, især fysik og kemi, hvor eleverne skal kunne omskrive formler og isolere ukendte størrelser, og derfor behandles proportionalitet i matematikundervisningen med inddragelse af eksempler fra andre fagområder, som eleverne har kendskab til.

Gennem eksempler og gentagen behandling skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger og have opbygget indsigt i, at ligningsløsning sker gennem gentagne anvendelser af 'omvendte operationer'. Til løsning af ligninger hører også simple ligninger med de elementære funktioner, der indgår i kernestoffet. Løsning af ligninger med sådanne sammensatte udtryk løses med CAS, og det er generelt accepteret, at CAS ("solve") i de aktuelle situationer finder samtlige løsninger.

Eleverne forventes at kunne løse simple ligningssystemer og simple andengradsligninger samt ligninger, der involverer indgående kendskab til egenskaberne ved andengradspolynomier.

Eleverne forventes at kunne håndtere ligningsløsning, som involverer indgående kendskab til egenskaberne ved eksponentiel- og logaritmefunktionerne (herunder den naturlige og 10-talslogaritmen). Eleverne skal desuden kunne anvende nulreglen.

I ligningsløsning indgår også arbejdet med repræsentationsformerne, fx skal eleverne kunne indføre passende variable (herunder betegnelser for disse) og opstille formler, simple ligninger og matematiske modeller med de elementære funktioner ud fra en sproglig beskrivelse af de sammenhænge, der forbinder forskellige størrelser, eller oplysninger om sammenhørende værdier for de variable repræsenteret ved koordinatsæt eller fastlagt ved en tabel.

Ved grafisk løsning er det vigtigt, at eleverne opnår fortrolighed med at kunne indrette koordinatsystemet hensigtsmæssigt i en given situation, og at en grafisk repræsentation kun viser et udsnit af både graf, definitionsængde og værdimængde. Ved grafisk løsning af ligninger kræves en argumentation for, at alle løsninger til den aktuelle ligning fremgår af det valgte grafvindue.

Med en omfattende brug af CAS er det helt centralt for fortolkning af CAS-svar, at eleverne kender forskellen på eksakt og tilnærmet værdi samt kender betydningen af begrebet absolut værdi (numerisk værdi og kan benytte formler, hvor absolut værdi indgår.

Løsning af uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: For hvilke værdier af  $x$  er medicinkoncentrationen større end/mindre end en given værdi?

### 3.2.2 Procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring

Inden for procent- og rentesregning skal eleverne kunne håndtere generel procentregning, og de skal kunne anvende fremskrivningsformlen til problembehandling, herunder redegøre for begreberne begyndelses- og slutværdi, rentefod og terminer. Specielt skal det mere generelle begreb vækstrate, som har stor betydning i arbejdet med modeller hele vejen igennem kernestoffet, gives en særlig behandling.

### 3.2.3 Statistik

Statistik handler om at uddrage viden fra data, dvs. alle former for registreringer og målinger fra alle former for opgørelser, monitoreringer og ikke mindst videnskabelige undersøgelser og eksperimenter. Hvor det er muligt, er det en stor fordel for indlæring af begreber og metoder, at det foregår i et samarbejde med andre fag som samfundsfag og de naturvidenskabelige fag, der som en naturlig del af faget producerer datamaterialer, som kan behandles i matematik.

Eleverne skal kende og kunne anvende de indbyggede faciliteter og muligheder, som deres matematiske værktøjsprogram tilbyder til behandling af stikprøver (fx én-variabel-statistik). I behandling af stikprøver diskuteres konkrete datamaterialers repræsentativitet, og betydningen af de enkelte deskriptorer fortolkes ind i problemets kontekst. Eleverne skal kunne håndtere diskret og grupperet datamateriale, simple statistiske deskriptorer og simple grafiske repræsentationer af data.

Eleverne skal for simple datasæt (afhængigt af om det er diskret eller grupperet) kunne bestemme og fortolke begreberne hyppighed, frekvens, kumuleret frekvens, middelværdi, fraktiler, median og øvrige kvartiler samt maksimum og minimum, og de skal kunne tegne og aflæse fra boksplot og trappediagram/sumkurve.

Ved den skriftlige prøve stilles ikke opgaver, der kræver produktion af boksplot eller sumkurver med elevernes CAS-værktøj.

Eleverne skal kunne beskrive og sammenligne grafiske repræsentationer med brug af ovennævnte deskriptorer samt simple spredningsbegreber som kvartilbredde, variationsbredde og den instrumentelt beregnede stikprøvespredning (standardafvigelse). Desuden skal de kende begrebet 'outlier', men det indgår ikke i opgaver ved den skriftlige delprøve 2.

Eleverne skal opnå fortrolighed med gængse regnearkskommandoer, der gør dem i stand til at bearbejde store datasæt i en statistisk analyse, herunder modellering med brug af regression. Det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere store datasæt i deres matematiske værktøjsprogram med henblik på videre bearbejdning, herunder datamanipulation (med gængse kommandoer), grafisk repræsentation, bestemmelse af simple statistiske deskriptorer mv. Det betyder blandt andet, at eleverne skal kunne håndtere eventuelle tekniske problematikker knyttet til deres matematiske værktøjsprogram vedrørende brug af decimalkomma og decimalpunktum samt andre tekniske udfordringer. En vej kan være at indstille computerens sprogindstillinger, så der overalt bruges decimalpunktum, mens komma reserveres til tusindtalsseparator.

Ved den skriftlige prøve vil datasæt, som det er nødvendigt at importere til eksaminandens matematiske værktøjsprogram under prøven, kunne indeholde kommatal.

### 3.2.4 Regression

Eleverne skal kunne opstille modeller ved hjælp af lineær og eksponentiel regression samt potensregression. Eksponentiel regression og potensregression kan udføres direkte eller som lineær regression på logaritmisk transformerede data.

Specielt den lineære model, herunder lineær regression (forstået som mindste kvadraters metode), gives en særlig behandling, hvor residualer studeres nøjere, herunder det tilhørende residualplot. Eleverne skal kunne beregne residualer (herunder fx udpege den observation, der repræsenterer den største afvigelse) i en lineær regression og vurdere afvigelsernes størrelser i forhold til modelværdierne, og de skal kunne give en kvalitativ vurdering af en lineær models gyldighed med henvisning til den tilfældighed (eller omvendt den systematik) i afvigelserne, der kommer til udtryk i residualplottet.

Eleverne forventes desuden at kunne opstille modeller ved hjælp af polynomiel regression og kunne tegne det til den aktuelle model hørende residualplot.

Behandlingen af lineær regression udvides med et kvalitativt kendskab til mindste kvadraters metode svarende til de faciliteter, et matematisk værktøjsprogram tilbyder, fx visning af residuelle kvadrater og undersøgende tilpasninger med flytbare linjer. I behandlingen heraf omtales fx den varsomhed, hvormed man bør omgås lineære modeller, hvor hældningskoefficienten viser sig at være tæt på nul, hvilket eleverne kan støde på i tværfaglige sammenhænge.

Bemærk, at i vurdering af en bestemt models anvendelighed forventes eleverne udelukkende at argumentere statistisk på baggrund af residualplot.

Eleverne skal opnå kendskab til stikprøvespredning, som udtrykker, hvor meget en beregnet størrelse, typisk den estimerede middelværdi, forventes at variere "fra stikprøve til stikprøve", altså hvor usikkert bestemt estimatet egentlig er.

### 3.2.5 Kombinatorik og sandsynlighedsregning

Eleverne skal have kendskab til både a priori (på forhånd givne) og frekventielle (statistiskbestemte) sandsynligheder og kende forskellen på disse. Sandsynlighedsfelter, herunder symmetriske sandsynlighedsfelter, behandles som model for stokastiske eksperimenter gennem konkrete eksempler; herunder bør beregning af middelværdi samt tegning af pinde-/søjle-diagram indgå.

Eleverne skal kende og kunne anvende begreberne fakultet, permutation og kombination, og endvidere kunne håndtere simple kombinatoriske beregninger af sandsynligheder ved hjælp af additions- og multiplikationsprincippet; herunder inddrages naturligt tælletræer, som eleverne kender fra folkeskolen. Uafhængige hændelser omtales i forbindelse med problemløsning, der kræver multiplikation af sandsynligheder, men gives ikke en selvstændig behandling. Formlen for  $K(n, r)$  kan generaliseres fx ud fra et eksempel, og det vil være naturligt at inddrage Pascals trekant i den forbindelse.

Eleverne skal kunne håndtere begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed, herunder også begrebet stokastisk variabel. Endvidere skal de kunne håndtere beregninger med middelværdi, varians og spredning for en stokastisk variabel med en given sandsynlighedsfordeling.

### 3.2.6 Trigonometri

Geometrien bygger videre på, at eleverne i folkeskolen har arbejdet med forholdsregninger i ensvinklede trekanter med brug af skalafaktor samt med Pythagoras' læresætning i retvinklede trekanter, og at de fleste har prøvet kræfter med et dynamisk geometriprogram.

Eleverne forventes ud fra givne oplysninger at kunne konstruere målfaste trekanter (svarende til de fem trekantstiltælde) i et matematisk værktøjsprogram. Konstruktion skal forstås i moderne forstand og dækker over brug af et matematisk værktøjsprograms indbyggede kommandoer til at afsætte linjestykker med fast længde samt vinkler med fast gradtal. Den tegning af en trekant, der vises ved indtastning af tre ukendte stykker (sider og/eller vinkler) i en 'trekant-løser' i et program, er ikke at betragte som elevens konstruktion. Ved besvarelse af opgaver, der involverer konstruktion, bør eleverne efterlade konstruktionsobjekterne synlige i deres besvarelse, så der kan henvises til disse i en konstruktionsforklaring.

Eleverne skal kende og kunne anvende de trigonometriske formler gældende for retvinklede trekanter og sinus- og cosinusrelationerne gældende for vilkårlige trekanter. Endvidere forventes eleverne at kunne regne frem og tilbage i arealformler for trekanter, dvs. dels kunne bestemme areal ud fra kendte sider og vinkel, dels kunne bestemme ukendt side eller vinkel ud fra areal samt to kendte stykker i trekanten (to



sider eller en side og en vinkel). Desuden forudsættes kendskab til linjer ved trekanten, som fx højde, median og vinkelhalveringslinje.

### 3.2.7 Analytisk plangeometri

På B-niveau udvides geometrien med den del af den analytiske geometri, som omhandler analytisk beskrivelse af objekterne linje og cirkel. Også i denne fase er det vigtigt som støtte for elevernes begrebsforståelse, at der i undervisningen veksles mellem konstruktion og beregning, og mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer. Elevernes forventes at kunne håndtere geometrisk modellering i form af at kunne indlægge geometriske objekter i et koordinatsystem og udføre aflæsninger og beregninger knyttet til modellen.

Eleverne skal opnå færdigheder og kompetencer i at kunne opstille og omskrive ligninger for cirkler (kvadratkomplettering) og bestemme ligninger for cirkeltangenter. Desuden skal eleverne kunne bestemme skæringspunkter mellem linjer og mellem linjer og cirkler samt vinkler mellem linjer og afstand fra punkt til linje. Til vinkel mellem linjer hører også sammenhængen mellem en ret linjes hældningsvinkel (med førsteaksen) og linjens hældningskoefficient.

I anvendelsesorienteret geometrisk modellering og problembehandling tages naturligt udgangspunkt i elevernes omverden, idet eleverne fx foretager højdemåling af bygninger eller afstandsmåling i et landskab. For at understøtte elevernes rumlige forståelse kan der indgå plangeometrisk modellering og problembehandling i relation til tredimensionale objekter. I nogle forløb kan det være naturligt at inddrage klip fra matematikhistoriske tekster eller tegninger/fotos af moderne design og arkitektur.

### 3.2.8 Vektorregning

Igennem vektorregningen arbejder eleverne med talforståelse, begrebsforståelse og algebra, parallelt med at de opstiller og løser geometriske problemer i og uden for koordinatsystemet. Vektorregningen skal således bidrage til, at eleverne vedligeholder og udvikler deres beregningsmæssige og algebraiske færdigheder, som de har med fra folkeskolen, samtidig med at de lærer noget helt nyt og går i dybden med nye geometriske begreber. Indførelsen af vektorbegrebet bør derfor såvel foregå i en vekslen mellem konstruktion og beregning som i en vekslen mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer.

Overordnet set skal eleverne kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål, dvs. de skal kunne opstille og løse trigonometriske og andre plangeometriske problemer på grundlag af vektorberegninger med vektorer på koordinatform.

Cosinus og sinus kan indføres som koordinater for retningsvektoren til et givet punkt på enhedscirklen, og eleverne forventes at kende tangens som forholdet mellem sinus og cosinus. Eleverne forventes at kunne operere med begreberne nulvektor, enhedsvektor, stedvektor og forbindelsesvektor. Desuden forventes de at kunne anvende de simple overgangsformler, som er nødvendige for at kunne håndtere stumpe vinkler mellem vektorer.

Eleverne skal i beregninger og i geometrisk fortolkning ved konstruktion kunne anvende regnereglerne for vektorer (addition, subtraktion og multiplikation med en konstant) og de elementære operationer til at bestemme: længde af en vektor, tværvektor til en given vektor, skalarprodukt og determinant for to vektorer, vinkel mellem to vektorer (herunder parallelle og ortogonale vektorer) samt projektion af en vektor på en vektor.

I den indledende vektorregning er der rig mulighed for, at eleverne selvstændigt arbejder med at formulere simple sætninger (om fx længden af en vektor eller sammenhængen mellem to vektorers skalarprodukt og deres indbyrdes beliggenhed) og efterfølgende gennemfører eksempelborne ræsonnementer gennem matematiske eksperimenter eller egentlige beviser med analytiske argumenter.

Eleverne forventes at kunne argumentere for regneregler og formler gennem eksempler og matematiske eksperimenter i et værktøjsprogram.

### 3.2.9 Funktioner

Eleverne skal opnå viden om de elementære funktioner: lineære og eksponentielle funktioner samt potensfunktioner, herunder disse funktioners karakteristiske egenskaber og grafiske forløb med henblik på definitions­mængde, værdimængde, monotoniforhold samt asymptotiske forløb (eksponentiel og potens). Blandt potensfunktionerne forventes eleverne kun at kunne håndtere kvadratfunktionen, kvadrat­rodsfunktionen og den reciprokke funktion.

Hvor der indgår konstanter i en regne­forskrift for en lineær eller en eksponentiel funktion, forventes eleverne at kunne argumentere for disses betydning for det grafiske forløb. Desuden bør eleverne have kendskab til, hvordan sammenhængen mellem lodret og vandret parallelforskydning af grafer kommer til udtryk i de aktuelle funktioners forskrifter.

Til de karakteristiske egenskaber for eksponentielle funktioner hører begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant og sammenhængen mellem  $a^x$  og  $e^{kx}$ .

Bemærk, at potensmodellers %-­vækstegenskab ikke vil være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve.

Eleverne skal kunne anvende de elementære funktioner i modellering, og de skal kunne forholde sig reflekterende til fremskrivninger ud fra modellerne, herunder diskutere idealiseringer og rækkevidden af modellerne med beregning af absolut/relativ afvigelse. De elementære funktioner bør derfor introduceres i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modellering af virkelighedsnære problemstillinger, som giver mening for eleverne, og hvor de aktuelle funktioners egenskaber kommer særligt klart til udtryk.

Eleverne skal opnå viden om andengrads­polynomier samt overordnet kendskab til polynomier af højere grad. De skal opnå viden om logaritmefunktionerne (10-talslogaritmen og den naturlige logaritme) og deres egenskaber, herunder logaritmeregnereglerne. Eleverne forventes ikke at kunne håndtere koordinatsystem med logaritmisk skala ved den skriftlige prøve.

Eleverne skal kende begrebet rod i et polynomium, og de forventes at kende begrebet faktorisering, specielt med henblik på andengrads­polynomier. Eleverne skal opnå viden om sammenhængen mellem grad og antal rødder (nulpunkter) for polynomier. Specielt for andengrads­polynomier skal eleverne kunne redegøre for både konstanternes og diskriminantens betydning for parablens beliggenhed i koordinatsystemet.

I bearbejdningen af de elementære funktioner bør der desuden indgå en grafisk og algebraisk undersøgelse af funktioner, hvor der indgår en parameter i funktions­forskriften, fx i kombination med lodret og vandret parallelforskydning.

De elementære funktioner kan bygges sammen til mere komplekse funktioner ved brug af regningsarterne og ved sammensætning, ligesom stykkevist definerede funktioner giver mulighed for at modellere fænomener, der opfører sig forskelligt i forskellige sekvenser, hvor definitions­mængden er intervalopdelt.

På B-niveau indføres og behandles de trigonometriske funktioner (sinus og cosinus) i en anvendelsesorienteret sammenhæng med fokus på modellering af periodiske fænomener med sinusfunktionen, hvor eleverne forventes at kunne håndtere skiftet til radianer i graftegning.

På A-niveau behandles de trigonometriske funktioner i dybden, men også her gerne med udgangspunkt i relevante eksempler fra andre fagområder i modellering af periodiske (harmonisk svingende) fænomener som fx tidevand eller lydbølger. Eleverne skal kunne håndtere radianbegrebet og sammenhængen med enhedscirklen. De skal kunne håndtere begreberne amplitude, periode og faseforskydning knyttet til en harmonisk svingning samt kende disse begrebers betydning for funktionens forskrift og for grafens beliggenhed. Trigonometriske funktioner skal således behandles i såvel anvendelsessammenhænge som rent matematisk med henblik på forståelse af begreber knyttet til disse funktioner og udforskning af funktionernes egenskaber.

I arbejdet med funktionsbegrebet forventes eleverne at opnå kendskab til invers funktion som begreb, og ikke blot som en procedure, der går ud på at isolere  $x$  og bytte om på  $x$  og  $y$  eller spejle grafen i linjen  $y = x$ , men som en omvendt proces, der definerer en afbildning af output over i input.

### 3.2.10 Monotoniforhold

Eleverne skal grafisk kunne håndtere en simpel funktionsundersøgelse i en anvendelsesorienteret sammenhæng, hvor modellen er givet på et begrænset interval. Det betyder, at de skal kunne bestemme en funktions ekstremum samt monotoniforhold ved aflæsning på grafen, herunder opskrive monotoniintervaller, og de skal grafisk kunne bestemme ligningen for en tangent til en graf.

De anvendelsesorienterede kontekster vælges, så det giver mening for eleverne, når de skal fortolke resultaterne af aflæsningerne. På den måde skal eleverne opleve, at matematiske værktøjsprogrammer bidrager til, at de kan opnå information om den kontekst, som modellen beskriver, og som de ikke ville kunne opnå uden.

### 3.2.11 Differentiæregning

Eleverne forventes at opnå fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation (sum, differens, produkt, multiplikation med konstant og sammensæt funktion med lineær indre funktion). Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning samt om at kende og kunne anvende sammenhængen mellem afledet funktion, monotoniforhold og ekstremum i problembehandling.

I nogle tilfælde vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for differentiation, der er beskrevet i kernestoffet. I disse tilfælde forventes eleverne at anvende CAS til at differentiere disse udtryk. Matematisk modellering med brug af differentiæregning bør omhandle eksempler fra flere andre fag – og hvor det er muligt især fra fag i studieretningen.

Arbejdet med begrebet differentiækvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, så eleverne opnår en intuitiv forståelse af begrebet, men det er ikke tænkt, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende inddrages kontinuitetsbegrebet på intuitiv vis i behandlingen af sammenhængen mellem den afledede funktion og begreber som monotoniforhold og ekstremum, men det er ikke tænkt, at dette gives en selvstændig behandling. Det er vigtigt for udvikling af elevernes begrebsforståelse, at de også møder funktionstyper, der ikke er kontinuerte, og funktioner, der ikke er differentiable.

Tangentbegrebet følges op med udledning af tangentens ligning med udgangspunkt i elevernes viden om den rette linjes ligning.

Eleverne skal kunne redegøre for differentialkvotientens betydning både i interne matematiske sammenhænge og i anvendelsesorienteret sammenhæng, dvs. de skal kunne fortolke differentialkvotienten som en væksthastighed i modelleringssammenhæng.

Eleverne forventes yderligere at kunne differentiere sammensat funktion med ikke-lineær indre funktion og håndtere simple problemstillinger i relation dertil.

### 3.2.12 Matematiske modeller og modellering

Eleverne forventes at kunne anvende funktionsudtryk til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og andre variabelsammenhænge, og de forventes at opnå viden om de forskellige faser i en modelleringscyklus (se eventuelt figur i afsnit 4.1 *Matematisk modellering*). Specielt skal den indledende fase i en modelleringsproces og selve matematiseringsfasen gives særlig opmærksomhed, så eleverne får kendskab til metoder, der kan benyttes til at få hul på en problemstilling, udvælge den matematik, der skal bringes i anvendelse, og dernæst matematisere problemet.

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem, fx et optimeringsproblem, mens andre udspringer af fx økonomiske, tekniske eller naturvidenskabelige sammenhænge, hvor eleverne arbejder med at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer.

I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer og rækkevidde, som typisk er relateret til den kontekst, som modellen indgår i. I samarbejde med andre fag eller ved inddragelse af viden fra andre fag kan man overveje, hvilke forenklinger, idealiseringer og abstraktioner der er acceptable i den givne situation og danner grundlag for en meningsfuld og anvendelig matematisering.

Eleverne skal kunne opstille simple matematiske modeller ud fra et givet talmateriale, en figur eller en beskrivende tekst, hvor de elementære funktioner bringes i anvendelse.

Modeller til beskrivelse af et datamateriale inviterer til spørgsmål om fremskrivninger og prognoser eller spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer samt konkrete beregningsmæssige spørgsmål på baggrund af bestemte oplysninger om konteksten. Eleverne skal i arbejdet med modeller opnå kompetence til at begrunde deres svar med beregning af absolut eller relativ afvigelse afhængigt af den aktuelle situation.

Den del af kernestoffet, der omhandler lineære modeller, er obligatorisk i grundforløbet, se eventuelt yderligere under afsnit 4.1 nedenfor.

### 3.2.13 Funktioner af to variable

Funktioner af to variable optræder i læreplanen som 'spor' til eventuelle videre studier med matematikindhold, og der er således ikke krav om, at eleverne skal kunne redegøre for teorien knyttet til emnet. Eleverne skal kende og kunne anvende begreber i problembehandling med funktioner af to variable på et instrumentelt niveau svarende til de muligheder, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder.

Arbejdet med funktioner af to variable skal bibringe eleverne en dybere forståelse af funktionsbegrebet og udvikle elevernes rumlige forståelse. Eleverne skal kunne tegne grafer for funktioner af to variable, herunder niveaukurver og snitkurver, og de skal kunne bestemme partielle afledede, anden afledede, gradienter og stationære punkter samt arten af disse (saddelpunkter og ekstremumpunkter). Ved bestemmelse af arten af stationære punkter for en funktion defineret på begrænsede intervaller er grafisk argumentation tilstrækkelig, hvis de aktuelle stationære punkter fremgår klart af grafen.

### 3.2.14 Integralregning

Bemærk at integralregning har større omfang som kernestof på A-niveau end som supplerende stof på B-niveau.

Integralregningen kan introduceres gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet, og man bør her trække på elevernes erfaringer fra differentialregningen og omtale bestemmelse af stamfunktioner som den omvendte proces af differentiation, så eleverne som udgangspunkt kan finde reference i allerede kendt stof.

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed med bestemmelse af stamfunktion for de elementære funktioner og med regnereglerne (sum, differens, multiplikation med konstant og substitution) for bestemte og ubestemte integraler, at de kan håndtere problembehandling, hvor disse begreber indgår.

I nogle tilfælde vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for integration, der er beskrevet i kernestoffet. I disse tilfælde forventes eleverne at anvende CAS til at integrere disse udtryk.

Sammenhængen mellem areal og stamfunktion skal gives en særlig behandling, og det vil være naturligt at tænke dette sammen med det supplerende stof om deduktive metoder og bevisførelse.

Til anvendelser hører problembehandling, der involverer integraler til bestemmelse af areal afgrænset af grafer, rumfang af omdrejningslegeme og kurvelængde.

### 3.2.15 Differentialligninger

Eleverne skal kunne løse logistiske og lineære første ordens differentialligninger, herunder eksponentiel vækst og forskudt eksponentiel vækst, samt simple separable differentialligninger af andre typer. Separation af de variable skal ikke gives en egentlig selvstændig behandling, men eleverne skal ud over den logistiske differentialligning kunne løse forelagte separable differentialligninger med CAS i et matematisk værktøjsprogram.

De grundlæggende elementer i en kvalitativ analyse af differentialligninger (viden, som modellen giver, uden at ligningen løses) er også en del af kernestoffet.

Eleverne forventes at kunne opstille simple differentialligninger svarende til de tre vækstmodeller (eksponentiel, forskudt eksponentiel og logistisk vækst) på baggrund af en sproglig formulering, og de skal tilsvarende kende og kunne anvende løsningsformlerne (som de er angivet i formelsamlingen) hørende til disse ligninger. Eleverne forventes endvidere at kunne håndtere procedurer til undersøgelse af, om en bestemt funktion er løsning til en forelagt differentialligning, samt kunne forstå og afkode en differentialligning på en sådan måde, at de kan bestemme ligningen for en tangent til en bestemt løsningskurve uden brug af CAS.

Eleverne skal opnå kendskab til begrebet linjeelement, og de skal kunne bestemme og tegne linjeelementer for differentialligninger. Desuden skal de have kendskab til numeriske metoder til løsning af differentialligninger med matematiske værktøjsprogrammer, herunder kunne tegne og afkode en grafisk repræsentation af en numerisk løsning til en differentialligning i et hældningsfelt. Dette giver muligheder for at eksperimentere med og studere differentialligninger, som ikke kan løses analytisk. Eleverne forventes at kunne aflæse relevante oplysninger af en forelagt numerisk løsning til en differentialligning i et hældningsfelt.

### 3.2.16 Mindstekrav

Mindstekravene udgør dels en balance mellem *færdigheder* og *kompetencer* og dels en balance mellem *uden* og *med* matematisk værktøjsprogram.

Mindstekravene knytter sig til de mest enkle og lettest forståelige dele af kernestoffet, som en elev forventes at kunne begå sig inden for. Mindstekravene retter sig dermed mod de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer, som en elev som minimum skal kunne mestre inden for et givet felt, når eleven har gennemført og bestået matematik på det aktuelle niveau.

Mindstekravene kæder viden og begrebsforståelse sammen med færdigheder og kompetencer i relation til simpelt ræsonnement, modellering og problembehandling. Kravene til brug af matematiske værktøjsprogrammer bygger på forståelse og fortolkning af såvel input som output både grafisk og symbolsk, og derfor dækker mindstekrav også over basal brug af de muligheder, som matematiske værktøjsprogrammer tilbyder.

Mindstekrav må ikke forveksles med beherskelse af basale algebraiske færdigheder alene. Beherskelse af basale algebraiske færdigheder uden matematiske værktøjsprogrammer udgør en central, men mindre del af mindstekravene.

Til mindstekravene hører, at eleverne kan identificere kernen i et simpelt matematisk problem, og at de kan gå til problemet med en rimelig struktureret tankegang, som de er i stand til at redegøre for. Som en del af mindstekravene skal eleven også besidde en vis robusthed, dvs. faglig fortrolighed med og selvstændighed i udvælgelse og anvendelse af metoder i bestemte typer af problembehandling med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer.

Overordnet set ligger de grundlæggende færdigheder og kompetencer på alle de tre matematikniveauer (C-, B- og A-niveau) inden for tal, variable, problembehandling, argumentation og analyse. Bearbejdninger heraf på ét niveau vil resultere i nye færdigheder og kompetencer, der kan anvendes og give anledning til nye på næste niveau. Mindstekravene udvides således dels med henblik på reelt nyt fagligt indhold og dels med henblik på det taksonomiske niveau, hvorpå en elev forventes at kunne forholde sig til allerede behandlet fagligt stof, når eleven bevæger sig fra et matematikniveau til et andet. Men samtidig kan mindstekrav på ét matematikniveau (B- eller A-niveau) indeholde elementer af de(t) underliggende niveau(er)s kernestof, som stadig er aktuelt i behandlingen af det aktuelle niveaus kernestof.

Opgaver, der afprøver, hvorvidt en elev mestrer mindstekravene, har karakter af typeopgaver, dvs. opgaver, der er forbundet med (en vis grad af) genkendelse for den elev, der aktivt har deltaget i undervisningen på det aktuelle niveau. Opgaverne er knyttet til hvert af de faglige emner i kernestoffet og består af spørgsmål med et eller få trin svarende til det unistrukturelle niveau i SOLO-taksonomien, herunder brug af simple kommandoer i et matematisk værktøjsprogram. Når en opgave omfatter et element af anvendelsesorientering, så beskrives problemstillingen i en kort og letforståelig tekst. Tilsvarende er symbolbrugen i 'nøgne' matematikopgaver letforståelig. Opgaverne fokuserer dels på beregninger, dels på forståelse og stilles ved den skriftlige prøve på A-niveau både ved delprøve 1 og ved delprøve 2.

Overordnet fokuserer mindstekravsopgaverne som udgangspunkt på følgende kategorier af færdigheder og kompetencer, som optræder inden for et eller flere kernestofemner:

#### **Begreber og symboler**

- Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og betydning af begreber
- Indføre variable og angive symbolske betegnelser

#### **Formler og funktioner**

- Omskrive og reducere formler og udtryk med papir/blyant og med CAS
- Indsætte konkrete værdier i formler (forskrifter) og tilskrive resultatet betydning
- Aflæse indgående størrelser og tilskrive størrelserne betydning (matematisk og i kontekst)

- Opstille formler og udtryk ud fra givne oplysninger eller en sproglig beskrivelse

### Ligningsløsning

- Afgøre, om et oplyst resultat (værdi, udtryk, funktion (A-niveau)) er en løsning til en ligning med papir/blyant og med CAS
- Algebraisk løse ligninger med papir/blyant og med CAS (herunder differentialligninger på A-niveau)
- Grafisk løse ligninger med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram

### Operationer på funktioner

- Differentiere funktioner med papir/blyant og med CAS
- Sammensætte funktioner med papir/blyant og med CAS
- Bestemme stamfunktioner og areal med papir/blyant og med CAS (A-niveau)

### Grafer og figurer

- Tegne grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram, herunder hensigtsmæssigt valg af 'grafvindue'
- Aflæse på forelagte grafer og grafiske repræsentationer samt på geometriske figurer (selvfrembragte med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram) – og tilskrive resultater betydning (matematisk og i kontekst)

### Tabeller

- Aflæse data fra tabel, herunder funktionstabel og sandsynlighedsfordeling
- Opskrive (importere) data i tabel, herunder frembringelse af funktionstabel med papir/blyant og med CAS

### 'Black box'-kommandoer i matematisk værktøjsprogram

- Anvende indbyggede 'en-knap-kommandoer'
- Anvende indbyggede statistiske undersøgelser af data

Mindstekravene, som de eksplicit kommer til udtryk ved den skriftlige prøve på A-niveau, er eksemplificeret i de vejledende opgaver. Ovenstående (inkl. de vejledende opgaver) må ikke ses som en udtømmende liste, men blot som eksempler, der anskueliggør kravene.

## 3.3 Supplerende stof

Hos gux er kernestoffet mindre omfattende end på de tilsvarende danske gymnasiale niveauer, men til gengæld er der krav om at en del af det supplerende stof skal indeholde et eller flere valgemner, der kan tones efter studieretning. Det vil være naturligt at behandle dele af det supplerende stof i samarbejde med andre fag. Der er en række bindinger på det supplerende stof, men man kan også beskæftige sig med andet supplerende stof, fx i relation til et konkret studieretningssamarbejde eller andre faglige samspil.

Det supplerende stof er obligatorisk. Det vil ikke indgå i opgaver i det centralt stillede projekt på B-niveau eller til den skriftlige prøve på A-niveau (ud over forberedelsesmaterialet), men det skal indgå i opgaverne ved den mundtlige prøve.

Mindst to af nedenstående 4 emner skal vælges som supplerende stof:

### 3.3.1 Indekstal og annuitetsregning

Som en del af en dybere talforståelse skal eleverne kunne håndtere relative beregninger, der involverer indekstal, herunder begrebet basisår.

Som en udvidelse af arbejdet med fremskrivningsformlen skal eleverne opnå viden om annuitetsregning, og det vil være oplagt at inddrage både trinvis beregninger i regneark samt de tilhørende formler. Emnet kan behandles gennem anvendelsesorienterede eksempler, der bygger på autentiske data. Man kan vælge at udbygge forløbet med serielån, amortisationstabeller eller skatteberegninger, som kan give eleverne et indblik i, hvordan forskuds- og årsopgørelser fra skat, læses. Dette stof er velegnet til projektorienterede forløb, hvor eleverne selv skaffer stof og problemstillinger til behandling.

### 3.3.2 Kombinatorik og sandsynlighedsregning

I forlængelse af grundlæggende sandsynlighedsregning introduceres begrebet stokastisk variabel. Begrebet skal anvendes i behandlingen af binomialfordelingen, hvorved man opnår en notation, der gør det mere enkelt at formulere spørgsmål og opstille formler. Eleverne skal kunne håndtere beregninger med middelværdi, varians og spredning for en stokastisk variabel med en given sandsynlighedsfordeling.

Eleverne skal kunne håndtere begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed, og de skal kunne anvende binomialfordelingen til løsning af virkelighedsnære problemstillinger, dvs. de skal kunne beregne punktsandsynligheder og kumulerede sandsynligheder samt middelværdi og spredning. Desuden skal eleverne kunne tegne og kunne aflæse på et søjlediagram på baggrund af en binomialfordeling.

En udledning af formlen for binomiale sandsynligheder vil være en naturlig opfølgning på argumentet for binomialkoefficienten. Eleverne skal kende betingelserne for, hvornår et empirisk datasæt kan betragtes som realiserede værdier af en binomialfordelt stokastisk variabel; herunder inddrages diskussion af eksperimenter med og uden tilbagelægning.

Hypotesetest i binomialfordelingen anvendes til at vurdere situationer, hvor der ud fra stikprøver sluttes til generelle udsagn om en population. Udgangspunktet for beregning af de forventede værdier i testet er den sandsynlighedsparameter  $p$ , som vi i den aktuelle situation betragter som 'den sande' værdi for  $p$  i populationen. De centrale begreber i et binomialtest er population, stikprøve, nulhypotese, alternativ hypotese, teststørrelse, kritisk værdi, signifikansniveau og  $p$ -værdi. Konklusioner draget af et hypotesetest diskuteres med henblik på systematiske fejl (bias) og skjulte variable (konfundering). Eleverne skal gennem eksempler kunne argumentere for nødvendigheden af at udføre et bestemt hypotesetest i binomialfordelingen som enten en ensidet eller tosidet test.

Eleverne skal kunne bestemme konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren  $p$  ('den sande' værdi for  $p$  i populationen) ud fra et stikprøveestimat for  $p$  (ofte kaldet  $\hat{p}$ ) med de faciliteter, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder, og de forventes herudfra at kunne uddrage den statistiske usikkerhed. Der findes flere måder at angive konfidensintervaller på i binomialfordelingen. Eleverne bør også opnå kendskab til beregning af konfidensintervaller ved brug af formlen baseret på stikprøvens størrelse  $n$  og stikprøveestimatet for  $p$ .

En naturlig indgang til arbejdet med binomialtests og konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren er simulering af nulhypotese fx knyttet til meningsmålinger. Igennem simuleringer operationaliseres begreberne i en kontekst, hvorved eleverne har bedre mulighed for at opnå meningsfuld indsigt i problemets natur. Desuden vil simuleringer og beregninger med binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion give gode muligheder for at diskutere løsningsmetodernes grad af præcision set i relation til praktisk anvendelse.

På B-niveau omtales og behandles sammenhængen mellem binomialfordelingen og normalfordelingen med anvendelse af middelværdi og spredning fra binomialfordelingen.



Eleverne skal derudover kende begreberne normale udfald, der højst ligger to spredninger fra middelværdien, og exceptionelle udfald, der ligger mere end tre spredninger fra middelværdien. Disse begreber anvendes typisk i beskrivelsen af normalfordelte datasæt.

Mens der på B-niveau lægges 'spor' ud til normalfordelingen ved brug af et matematisk værktøjsprograms indbyggede faciliteter, så skal normalfordelingen gives en selvstændig behandling på A-niveauet.

Eleverne skal opnå kendskab til tæthedsfunktionen for normalfordelingen, herunder standardnormalfordelingen, repræsenteret ved tabel, graf og forskrift. De skal kunne håndtere middelværdi og spredning som parametre i normalfordelingsmodeller, herunder den betydning, middelværdi og spredning har for form og beliggenhed af tæthedsfunktionens og fordelingsfunktionens graf. I arbejdet med fordelingsfunktionens graf kan man med fordel trække referencer til sumkurver i den deskriptive statistik.

Eleverne skal kunne inddrage begreberne middelværdi og spredning i analyse af, om udfald er normale eller exceptionelle (som beskrevet ovenfor) i normalfordelingen, herunder sandsynligheden for, at en observation falder i hver af kategorierne.

Eleverne forventes at benytte deres matematiske værktøjsprograms indbyggede faciliteter til beregninger i normalfordelingen og til undersøgelse af, om et givet empirisk datasæt med rimelighed kan antages at stamme fra en normalfordelt stokastisk variabel.

I et sammenhængende forløb om normalfordelingen er det oplagt at koble med inddragelse af autentiske data.

Med et mere indgående kendskab til normalfordelinger kan eleverne i tilknytning til en lineær model bestemt ved lineær regression give en grundigere vurdering af residualerne ved også at inddrage denne viden om normalfordelinger, dvs. at de ved hjælp af deres matematiske værktøjsprogram skal kunne vurdere, om residualerne er normalfordelte (brug af fraktilplot). Endvidere vil eleverne kunne benytte deres matematiske værktøjsprograms indbyggede faciliteter til bestemmelse af konfidensintervaller for hældningskoefficienten i en lineær model. Som resultat heraf oplyses i de gængse matematiske værktøjsprogrammer også residualspreddingen, som er introduceret på B-niveau. Det vil være oplagt at tilrettelægge en eksperimenterende undersøgelse af en bestemt lineær sammenhæng (eventuelt med data hentet fra andre fag), hvor hældningskoefficienten ligger tæt på nul, med det formål at kunne vurdere, om det overhovedet giver mening at tale om en sammenhæng mellem de aktuelle variable.

### 3.3.3 Vektorregning

Der vil normalt være udbredt forskel på, hvilke formler der udledes, og hvilke sætninger der bevises analytisk på henholdsvis C-, B- og A-niveau, fx vil analytisk udledning af formelen for skalarprodukt (vinkel mellem vektorer), formelen for determinant og projektionsformlen normalt kun indgå på A-niveau.

Eleverne møder i kernestoffet vektorregningen i planen, og på denne baggrund udvides begreber herfra til vektorregning i rummet, herunder 3D-tegning og konstruktion i et matematisk værktøjsprogram.

Eleverne skal i beregninger og i geometrisk fortolkning ved konstruktion kunne anvende regnereglerne for vektorer (addition, subtraktion og multiplikation med en konstant) og de elementære operationer til at bestemme: længde af en vektor, skalarprodukt og vektorprodukt for to vektorer (herunder afgøre om to vektorer er ortogonale eller parallelle), vinkel mellem to vektorer samt projektion af en vektor på en vektor.

Eleverne skal arbejde med linjer og planer i rummet, og herunder møde begreber som henholdsvis retningsvektor og normalvektor. Med baggrund i vektorregningen skal de kunne opstille og løse rumgeometriske problemer, der vedrører afstande, vinkler og skæringer mellem geometriske objekter som punkter, linjer og planer.

Under behandlingen af vektorproduktet kan der endvidere arbejdes med arealberegning for parallelogrammer og trekanter.

### 3.3.4 Vektorfunktioner og banekurver

I arbejdet med vektorfunktioner indgår naturligt begreber og procedurer fra funktioner og fra vektorregningen, og der dannes hermed en 'bro' mellem disse to 'søjler'.

Eleverne skal have kendskab til vektorfunktioners forskellige repræsentationsformer og kunne skifte mellem de forskellige repræsentationer. I arbejdet med vektorfunktioner skal eleverne kunne bestemme skæringspunkter med akserne, dobbeltpunkter (når en parameterværdi er kendt) samt retningsvektor for tangent og tangentlinning, herunder ligning for vandret og lodret tangent.

Til anvendelser hører modeller beskrevet ved vektorfunktioner, herunder at eleverne kan håndtere problemstillinger i relation til et objekts bevægelse, hvor tiden er input og stedkoordinaterne er output, og at de kender betydningen af begreberne hastigheds- og accelerationsvektor.

Vil man arbejde yderligere med anvendelser, kan man fx inddrage krumningsbegrebet, kurvelængde af banekurve og areal af et område afgrænset af en banekurve.

For at eleverne kan leve op til alle læringsmål, skal det supplerende stof endvidere omfatte:

### 3.3.5 Ræsonnement og bevisførelse

Eleverne skal møde den matematiske teori løbende gennem hele gymnasieforløbet, og de skal selvstændigt arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem "hvad man ved", "hvad man antager", og "hvad man ønsker at vide". Det gælder, uanset om der arbejdes med ren matematisk teori eller med anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. Dette aspekt kan fx fremhæves ved at præsentere eleverne for vidt forskellige beviser for samme sætning.

Eleverne skal opnå viden om, at der er forskel på den måde, hvorpå matematiske emner fremstilles i bøger, og den måde, hvorpå teorien hørende til emnet oprindeligt er fremkommet. De skal kende til bevisets rolle og derigennem opnå indsigt i fagets deduktive natur (afpasset A-niveau), hvor der skelnes mellem forudsætninger, antagelser, definitioner og sætninger. Eleverne skal selvstændigt kunne fremlægge simple matematiske ræsonnementer af forskellig karakter, og de skal kunne argumentere for de bærende idéer i udvalgte (gerne forskelligartede) beviser inden for forskellige dele af de emner, der hører til A-niveauet. Denne side af matematikkens væsen bør introduceres tidligt gennem eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for elevernes selvstændige arbejde med matematiske eksperimenter, diskussion af antagelser og forudsætninger samt diskussion af det induktive kontra det deduktive. Det kan være direkte knyttet til kernestof eller supplerende stof.

Geometri og trigonometri indeholder sætninger med beviser, som er velegnede som introduktion til matematisk tankegang og argumentation.

Differentialregningen er det helt centrale abstrakte emne og skal derfor i denne sammenhæng gives en særlig behandling, eksempelvis ved at benytte tretrinsreglen til bestemmelse af simple differentialkvotienter og regneregler for samme.

Betingelserne for løsning af andengradsligningen og for udledning af løsningsformlen kan give mulighed for at sætte fokus på, hvordan et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af argumenter.

På A-niveau er der større vægt på deduktive metoder end på C- og B-niveau. Særligt skal dele af infinitesimalregningen behandles med en deduktiv tilgang, herunder udledning af analysens fundamentalsætning om sammenhængen mellem areal og stamfunktion samt udledning af fuldstændige løsninger til udvalgte differentialligninger.

I forløb om deduktive metoder og matematikkens aksiomatisk deduktive opbygning vil det være oplagt også at diskutere videnskabsteoretiske spørgsmål. Det kan være i forløb om indledende vektorregning, differentialregning eller differentialligninger.

Ca. 3 uger før den skriftlige eksamen offentliggøres forberedelsesmaterialet til den skriftlige eksamen. Eleverne arbejder med materialet under vejledning, og stoffet indgår som en del af det supplerende stof, der stilles spørgsmål i ved den mundtlige eksamen.

### 3.3.6 Væksthastighed – et vigtigt begreb i matematiske modeller

Eleverne skal opnå kendskab til, hvordan man ud fra tangentens hældningskoefficient kan opnå information om, hvordan en given udvikling forløber, dvs. de skal kunne fortolke tangentens hældningskoefficient som en væksthastighed i en forelagt matematisk model. Eleverne skal rent instrumentelt ved brug af CAS eller ved aflæsning kunne bestemme tangentens hældningskoefficient i en anvendelsesorienteret kontekst fx hentet fra et andet fag, som eleverne har kendskab til.

Eleverne skal som 'spor' til A-niveau opnå kendskab til, hvordan man ud fra viden om en afledet funktion beskrevet som væksthastighed i konstant eller eksponentiel vækst kan opnå kendskab til den oprindelige funktions vækstforhold gennem opstilling af en ligning, hvori både den afledede funktion og funktionen selv indgår. De skal rent instrumentelt ved brug af CAS kunne bestemme løsningen til simple begyndelsesværdiproblemer (differentialligning med begyndelsesværdi), der beskriver en problemstilling i en anvendelsesorienteret kontekst fra et andet fag, som eleverne har kendskab til. Det er ikke tanken, at eleverne skal kunne opstille, analysere eller løse andre typer af differentialligninger.

Desuden kan den dobbelt afledede naturligt inddrages i undersøgelse af funktioners monotoniforhold og grafers krumningsforhold.

### 3.3.7 Autentiske data

Eleverne skal arbejde med autentiske data. Til autentisk datamateriale hører både data hentet i diverse databanker eller andre steder og data, som eleverne selv producerer. Det vil desuden være oplagt at inddrage diskussion og behandling af store datamængder ("big data") som et led i arbejdet med elevernes digitale dannelse. Autentiske data skal som andre forelagte data behandles i et matematisk værktøjsprogram. Inddragelse af autentiske data bør, hvor det er muligt, løbende foregå i behandlingen af kernestoffet. Eleverne forventes at kunne importere og bearbejde store datamængder i deres matematiske værktøjsprogram.

### 3.3.8 Matematikhistorie

Eleverne skal præsenteres for nedslag i den matematikhistoriske udvikling, der perspektiverer et eller flere emner i kernestof eller supplerende stof. Det kan fx foregå ved en motiverende historisk introduktion til et eller flere emner eller ved løbende nedslag og uddybende behandling, der perspektiverer enkeltdele og kæder gymnasiematematikken sammen med historiske resultater. Matematikhistoriske forløb i samspil med faget historie, som alle elever møder i deres gymnasieforløb, vil desuden kunne underbygge elevernes fremtidige arbejde med studieretningsprojektet. Der bør om muligt, specielt i sammenhængende forløb, indgå matematikhistoriske kilder, som lægger op til et undersøgende arbejde, der udfordrer og udvikler elevernes nysgerrighed med henblik på matematikkens udvikling, form og brug.

Det historiske perspektiv skal her indgå som en del af et sammenhængende forløb. Det kan være i selvstændige forløb eller i kernestofforløb, hvor det er oplagt at lægge historiske passager ind, hvor eleverne fx arbejder med historiske kilder, fx ved tangentbestemmelse eller behandling af logistisk vækst.

## 4. Undervisningens tilrettelæggelse

Tilrettelæggelse af undervisningen kan foregå på mange måder, og nedenstående repræsenterer en række anbefalinger til, hvilke elementer der bør overvejes i forberedelsen af de enkelte lektioner og sammenhængende forløb.

### 4.1 Didaktiske principper

Undervisningen tilrettelægges med variation i forhold til arbejdsformer og undervisningsformer. Et modul kan eksempelvis begynde med et eksperiment, hvor eleverne prøver sig frem og selv opdager matematiske strukturer og sammenhænge. Andre gange præsenteres stof og metoder af læreren, hvorefter elever arbejder med dette, fx i form af opgaveregning. Nogle forløb og moduler tilrettelægges, sådan at hele klassen har en dialog om et emne, mens andre tilrettelægges, så elever i par eller i små grupper arbejder mere selvstændigt med et givent stof. I alle tilfælde vil omdrejningspunktet være elevernes selvstændige arbejde med stoffet.

For at udvikle den enkelte elevs matematikfaglige potentiale må det medtænkes i planlægningen af undervisningen, at både den fagligt stærke og den fagligt svage elev får et fagligt udbytte af undervisningen. Hele klassen behøver derfor ikke altid arbejde med det samme stof, og de behøver ikke altid arbejde med stoffet på samme måde.

Et grundlæggende princip for undervisningstilrettelæggelse bør være: "Ikke alle skal lære alt", men alle skal lære så meget, som de kan. Eleverne kommer med forskellige forudsætninger, og disse kan udjævnes, men der er også elever, som bare er bedre til matematik end andre elever (som i sportens verden). Derfor er det helt centrale didaktiske princip især på B-niveau: Undervisningsdifferentiering, hvor de elever, der vælger at opgradere, skal have mulighed for at arbejde med stoffet på et abstraktionsniveau, der forbereder dem til A-niveauet. Disse elever vil typisk arbejde mere teoretisk i dybden med stoffet end resten af klassen, fx kan de arbejde med beviser for sætninger, som de andre elever blot arbejder med at besvare opgaver ud fra.

Undervisningen tilrettelægges, så eleverne møder og bearbejder problemstillinger, der udspringer fra faget selv såvel som fra omverdenen. Det er motiverende for de fleste elever at opdage, at matematikken kan bringes i anvendelse, men det løfter også abstraktionsniveauet fra blot at kunne finde og indsætte i de rette formler til at skulle oversætte mellem repræsentationsformerne. Derfor er det helt centralt at have blik for og udpege over for eleverne, hvor de forskellige dele af det faglige stof bringes i spil i anvendelsesorienterede kontekster, så de lærer at afkode det matematiske problem i en kontekst, løse problemet og forklare, hvad løsningen til det matematiske problem betyder for konteksten.

Ved at formulere faglige mål og delmål for hvert større forløb bliver det tydeligt i en fælles forståelse for både lærer og elever, hvilke forventninger der er til indhold, form og elevernes indsats, så eleverne har de bedste forudsætninger for at tage aktiv del i de aktiviteter, der igangsættes i undervisningen. Det kan være nødvendigt at arbejde med særlige delmål for grupper af elever, som enten er fagligt stærke eller fagligt udfordrede. Uanset hvilken kategori en elev tilhører, så er succesoplevelser altafgørende for motivationen til fortsat at lære og yde den vedholdende indsats, der kræves for at lære et svært fag som matematik. Tydelige mål og delmål er desuden afgørende for en effektiv evaluering, som både læreren og den enkelte elev kan bruge fremadrettet.

### 4.1.1 Overgang og grundforløb

Grundforløbet er et afgrænset forløb i første semester, hvor eleverne skal introduceres til gymnasial matematik, som er en helt ny verden for mange af dem. De faglige krav er ikke kun højere, men de opleves også som meget anderledes. Eleverne går fra hovedsageligt at skulle kunne beskrive indholdet af fx en formel og forklare en løsningsprocedure til at skulle kunne argumentere for, hvordan fx en formel er fremkommet, og hvorfor en bestemt løsningsprocedure foretrækkes frem for en anden.

Eleverne skal gennem behandling af det faglige emne om lineære funktioner og lineære modeller dels inspireres til at gå på opdagelse og stille spørgsmål, dels møde passende krav til symbolbehandling og præcision i matematisk sprogbrug. Der skal være plads til både simple ræsonnementer i en teoretisk behandling af stofområdet og til modellering og problembehandling, der illustrerer stofområdets anvendelsesmuligheder fx i samspil med science.

I grundforløbet skal eleverne introduceres til gymnasiets tre forskellige matematikniveauer, C-, B- og A-niveau. Eleverne skal derfor igennem tilrettelæggelsen af undervisningen i grundforløbet opnå indsigt i forskellen på de tre niveauer, så de kan vælge studieretning og dermed matematikniveau på et oplyst grundlag.

Grundforløbet bør tilrettelægges, så eleverne fra dag ét møder matematik som et levende og spændende fag og ikke løbes over ende af krav om at kunne mestre diverse basale færdigheder.

Da eleverne efter grundforløbet muligvis fortsætter i forskellige studieretningsklasser, bør der på den enkelte skole behandles en ensartet kerne af stof for alle matematikhold i grundforløbet, så alle elever så vidt muligt har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet. Der er ikke faste regler for, hvor mange timer der skal afsættes til matematikundervisning i grundforløbet. Derfor skal matematikfaggruppen lokalt på den enkelte skole blive enige om det konkrete faglige indhold i grundforløbet, herunder eventuel inddragelse af yderligere kernestof. Det vil fx være demotiverende for elever at skulle igennem det samme stof to gange.

Matematikfaggruppen bør have klare aftaler for elevernes brug af matematiske værktøjsprogrammer i grundforløbet og på hvert af de tre niveauer C-, B- og A-niveau, så eleverne også i den henseende har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet.

Eleverne kommer normalt fra folkeskolen med ret forskellige matematikfaglige forudsætninger, og de er måske blandet på hold på tværs af kommende studieretninger og dermed interesse for faget. Det er derfor helt afgørende, at læreren indtænker undervisningsdifferentiering i sin tilrettelæggelse af grundforløbet, så hver enkelt elev oplever at være tilpas udfordret. Det er desuden en væsentlig pædagogisk opgave i grundforløbet, at alle elever oplever et spændende fag, som virker overkommeligt for dem at arbejde med fremover. Arbejdsformerne skal varieres, og der bør indgå forskelligartede skriftlige og mundtlige produkter – og ikke et ensidigt fokus på grundforløbets afsluttende screening.

Som lærer skal man være opmærksom på de udfordringer, der ofte beskrives ved overgangen fra folkeskolens matematikundervisning til gymnasiets matematikundervisning. Det handler blandt andet om tempoet, hvormed der indføres nye begreber, at der generelt er et højere abstraktionsniveau, og at der stilles større krav til præcision, fx i forbindelse med simpel symbolmanipulation og algebraisk løsning af simple førstegradsligninger samt krav til systematik i brugen af matematiske værktøjsprogrammer.

Eleverne skal i løbet af grundforløbet så vidt muligt udvikle gode studievaner, herunder også gode lektielæsningsvaner, dvs. eleverne skal lære, hvordan man forbereder sig bedst muligt til matematikundervisningen i gymnasiet. Læreren må derfor sørge for at give eleverne meningsfulde og overkommelige lektier for og følge op på disse i hver lektion. Lektierne behøver ikke nødvendigvis være de

samme for alle elever. Det er en stor hjælp for mange elever, at der i lektien er formuleret konkrete fokuspunkter eller spørgsmål til en tekst eller en opgave, som eleverne arbejder med derhjemme, så formålet med lektien er klart for den enkelte elev. Eleverne skal opleve, at det er betydningsfuldt for deres matematiklæring og for undervisningens tilrettelæggelse, at de møder velforberedt til timerne. Tilsvarende er det vigtigt at gøre eleverne opmærksomme på, at de meget let går glip af noget og kommer bagud i et fag som matematik, der i høj grad opbygges kumulativt, hvis ikke de møder forberedt frem og deltager aktivt i undervisningen.

I sidste del af grundforløbet gennemføres den afsluttende screening, der anvendes til at få indblik i den enkelte elevs evne til at anvende det centralt fastsatte kernestof om lineære funktioner og lineære modeller. Se nærmere om afvikling og evaluering i afsnit 5.1.

#### 4.1.2 Ræsonnement

Eleverne skal selvstændigt arbejde med matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet inden for alle områder af det faglige stof. De skal opnå fortrolighed med matematisk tankegang, sådan at de kan skelne mellem forudsætninger, antagelser, definitioner og sætninger samt redegøre for centrale beviser inden for flere af det aktuelle matematikniveaus stofområder. Ræsonnement skal ekspliciteres i forbindelse med behandling af ren matematisk teori, i modellering og under en eksperimentel behandling af et stof, hvor eleverne selvstændigt opdager "nye" matematiske sætninger eller arbejder med simuleringer. Se under supplerende stof for en yderligere udfoldning af begrebet.

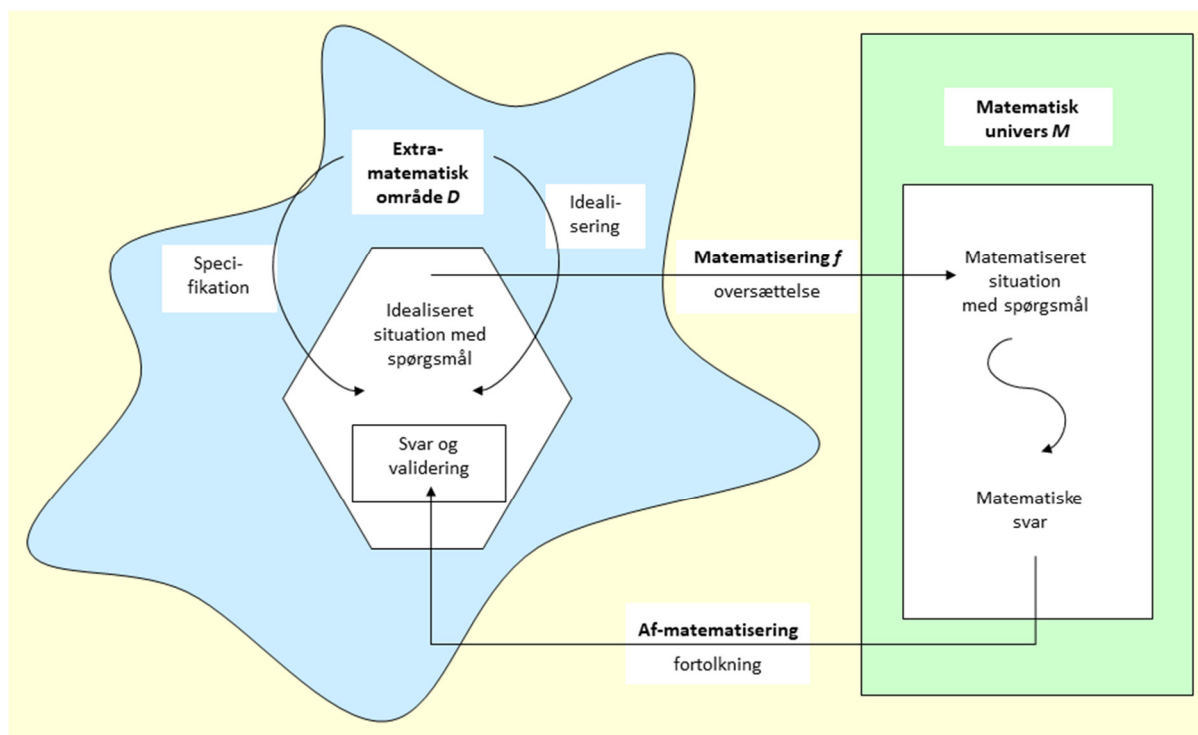
#### 4.1.3 Problembehandling og modellering

Opgaveløsning er en central del af matematikfaget, som skal tilrettelægges med det formål at konsolidere færdigheder og udvikle en dybere forståelse af begreber. At løse opgaver med et ensidigt fokus på at kunne løse fagets afsluttende skriftlige projekt- og eksamensopgaver giver eleverne store problemer med at kunne håndtere matematiske problemstillinger, som ikke er 'standardopgavetyper', fordi de snarere lærer at *genkende* en opgavetype end at *forstå*, hvad en forelagt opgave egentlig går ud på. At kunne afkode, hvad et matematisk problem dækker over, og dernæst kunne vælge en hensigtsmæssig løsningsstrategi kræver matematisk indsigt, der rækker udover almindelig mønstergenkendelse, hvilket bør tilgodeses i tilrettelæggelsen og arbejdet med fx emne- og projektopgaver.

Mange tidligere eksamensopgaver fra både gux og de øvrige gymnasiale områder (hf, stx, hhx og htx) kan naturligt indgå på flere måder i undervisningen. Hvornår og hvordan afhænger af, hvor i det samlede forløb holdet befinder sig. Sædvanligvis kan det være hensigtsmæssigt at omskrive opgaverne og lette det faglige niveau ved at tilføje delspørgsmål, ved at stille krav om en bestemt løsningsmetode, så de passer til det relevante taksonomiske niveau, eller omvendt ved at omskrive og udvide dem, så de bliver mere åbne og mere omfattende til brug for et projektforsøg.

Problembehandling og matematisk modellering bør tilrettelægges, så eleverne selv lærer at formulere og besvare matematiske spørgsmål (og opgaver) i en kontekst uden for matematikken selv. Formuleringerne kan være målet i sig selv, eller spørgsmålene kan fx besvares (løses) af andre elever.

Eleverne skal ikke kun arbejde med matematisk modellering og problemløsning i forbindelse med kernestofemnerne, men også på tværs af emnerne (svarende til 'broer' imellem 'søjlerne'). Eleverne skal arbejde med alle faser i modelleringsprocessen, herunder matematiseringsfasen, hvor netop det at stille relevante spørgsmål og oversætte disse til et matematisk problem, der kan løses, er centralt.



Modelleringscyklus (Mogens Niss: *Matematisk modellering i matematikundervisningen*, Nuuk, 2016)

#### 4.1.4 Undersøgelserbaserede aktiviteter

Matematik fremstilles ofte deduktivt, men udvikles induktivt, og dette skal elever opleve gennem en undersøgende behandling af matematiske emner og problemstillinger, hvor eleverne prøver sig frem og derigennem opnår ny viden. Der findes flere udgivelser fra udviklingsprojekter på området i Matematiklærerforeningens regi samt materiale fra IBMT-kursus på Matematikseminar 2019, der beskriver eksempler herpå. Desuden er der til de gængse matematiske værktøjsprogrammer udviklet materiale, der kan findes på de respektive programmets undervisningsrelaterede websites.

Matematiske eksperimenter udgør et væsentligt grundlæggende for udvikling af elevernes ræsonnementskompetence. Både tilrettelæggelse og udførelse af eksperimenterende undersøgelser af fx et begreb eller et problem kræver kæder af matematiske argumenter, ligesom konklusioner draget på baggrund af eksperimenterende undersøgelser af fx en matematisk sætning kan være med til at udvikle elevernes forståelse af, hvornår et argument kan betragtes som et matematisk bevis.

Ikke alle forløb skal tilrettelægges med en eksperimentel tilgang. Indimellem vælges en traditionel deduktiv behandling af en matematisk teori, hvorved eleverne skal opnå en forståelse af matematikkens (aksiomatisk) deduktive opbygning. Eleverne skal arbejde selvstændigt med stoffet i en progression frem mod at kunne gennemføre en individuel præsentation af et matematisk ræsonnement.

#### 4.1.5 Færdigheder

Basale matematiske færdigheder tager lang tid at opnå, og de kan smuldre eller helt forsvinde, hvis de ikke holdes ved lige. De er dynamiske, og de kan kun konsolideres, hvis de fremhæves og dyrkes i andre sammenhænge end der, hvor de er bygget op. Det kræver tid, før en basal matematisk færdighed modnes og bliver en robust og aktiv del af en elevs matematikberedskab. Det er derfor helt centralt, at man i undervisningen vender tilbage til de basale matematiske færdigheder mange gange i løbet af et gymnasieforb. Erfaringer har gang på gang vist, at et intensivt kursus i begyndelsen af skoleåret (fx i grundforløbet) kun har yderst ringe effekt. Læreren må indtænke en for eleverne meningsfuld gentagen

træning af de basale færdigheder, netop når det er relevant, dvs. når behovet naturligt opstår i de faglige aktiviteter.

#### 4.1.6 Formelsamling

Som element i arbejde med de af mindstekravene, der kan henføres til færdigheder, bør en formelsamling være et centralt hjælpemiddel. Hvis formelsamlingen skal repræsentere en reel hjælp for den enkelte elev, så skal eleven lære at slå op i den og bruge den på de enkelte trin frem mod en løsning af et givet problem. De af de grundlæggende matematiske færdigheder, som også er mindstekrav, skal fremhæves i undervisningen, så det bliver tydeligt for den enkelte elev, hvad der er mindstekrav, fx ved at bede eleverne om at angive, hvilke formler de har brugt til at løse bestemte opgaver.

For matematik A bør eleverne i undervisningen lære at benytte den centralt udmeldte formelsamling, der er eneste tilladte hjælpemiddel under delprøve 1 ved den skriftlige eksamen i faget.

#### 4.1.7 Matematisk symbolsprog og kommunikation

Kommunikation i matematik med brug af symbolsprog både skriftligt og mundtligt skal med en hensigtsmæssig progression trænes igennem elevens samlede matematikforløb. Eleverne kan bl.a. træne dette ved at læse, sammenligne og diskutere matematiske tekster hentet fra forskellige typer af kilder, herunder forskellige lærebøger, som ofte repræsenterer forskellige fremstillinger af et bestemt emne. Tilsvarende kan forberedelsesmaterialerne (fra guxA, hfB, stxA, hhxA eller htxA) samt historiske fremstillinger af et bestemt matematisk emne inddrages.

Elevernes selvstændige brug af matematikkens symbolsprog læres dog ikke alene ved at læse andres matematiske tekster. Der bør være særligt fokus på, at eleverne udvikler matematisk symbolsprog i udvalgte mundtlige og skriftlige produkter i såvel tværfaglige som enkeltfaglige forløb.

#### 4.1.8 Matematiske værktøjsprogrammer

Matematiske værktøjsprogrammer skal ikke blot inddrages som middel til at løse matematiske problemer som fx eksamensopgaver. Programmerne skal i høj grad også udnyttes til begrebsindlæring inden for alle emner. I undersøgende tilrettelæggelser med CAS skabes mulighed for elevernes selvstændige udvikling og forståelse af begreber i relation til fx:

- konstanter betydning i forskellige funktionstyper vha. "skydere"
- simple sammenhænge inden for geometri ved visuelle betragtninger
- statistiske fordelinger ved at udføre simuleringer
- differentialkvotienter for forskellige funktionstyper ved at opsamle tangenthældninger i forskellige punkter og udføre en passende regression
- mulige løsninger til differentialligninger ved at tegne linjeelementer (hældningsfelt).

Når de matematiske værktøjsprogrammer anvendes i opgaveløsning, skal det tydeliggøres for eleverne, hvori mindstekravene i forhold til anvendelse af et matematisk værktøjsprogram består.

#### 4.1.9 Specielt om tilrettelæggelse mhp. træning frem mod de mundtlige prøver

Eleverne skal løbende igennem undervisningen præsenteres for og have mulighed for at bearbejde eksempler på formulering af opgaver og spørgsmål, der kan optræde ved den mundtlige prøve, fx gennem individuelle præsentationer i grupper, hvor spørgsmålene er tilpasset emnets aktuelle taksonomiske niveau på det tidspunkt, hvorpå stoffet er bearbejdet. Fx er måden, hvorpå man vil formulere et spørgsmål om funktioner, afhængig af, hvor i det samlede tidsmæssige forløb stoffet er behandlet. Det centrale er, at eleverne opnår indsigt i, hvordan en eksamensopgave knyttet til et kendt stof er formuleret, og hvilke krav der stilles til en præsentation af et svar herpå og en samtale herom.



De endelige eksamensopgaver formuleres fortrinsvist med udgangspunkt i det højeste taksonomiske niveau, hvorpå emnet er behandlet, og således at hvert af spørgsmålene afspejler det aktuelle matematikniveau. De mundtlige eksamensopgaver vil derfor ikke kunne udformes endeligt før ved afslutningen af det samlede forløb frem mod det aktuelle niveau (A-niveau). Først på det tidspunkt vil eleverne kunne anvende deres erhvervede matematiske færdigheder og kompetencer til at ræsonnere, besvare spørgsmål og indgå i en faglig samtale på det aktuelle matematikniveau med inddragelse af underliggende niveaus stofområder på et passende taksonomisk niveau.

## 4.2 Arbejdsformer

Da elever lærer på forskellige måder, er en forudsætning for, at flest muligt lærer mest muligt, at arbejdsformerne er varierede og elevaktiverende. Arbejdsformerne kan varieres med henblik på elevernes muligheder for forståelsesafprøvning og feedback samt overvejelser om hensigtsmæssig inddragelse af matematiske værktøjsprogrammer. Arbejder eleverne sammen i mindre grupper, er det let for de fleste elever at stille opklarende spørgsmål og derudfra danne deres egen begrebsforståelse, mens det kan være grænseoverskridende for mange elever at stille den samme type spørgsmål i en klasseundervisningssituation. Derfor bør klasseundervisning i form af foredrag og læreroplæg, hvor læreren formidler et fagligt stof, altid jævnligt afbrydes af korte sekvenser med fx parvise diskussioner og opfølgninger på det, der netop er blevet præsenteret/gennemgået, eller spørgsmål, der har karakter af at forudsige, hvad der sker i de(t) næste trin.

I nogle forløb, timer og sekvenser indgår undersøgelsesbaserede arbejdsformer, hvor eleverne selvstændigt i par eller mindre grupper undersøger matematiske begreber, sammenhænge og strukturer. I centrum for valg af arbejdsform skal altid stå elevernes mulighed for at bidrage aktivt til kommunikationen om og arbejdet med at lære nye begreber og metoder. Arbejdsformerne skal tilpasses elevernes differentierede faglige niveau, så det faglige løft for forskellige elevgrupper bliver størst muligt, hvilket kan betyde, at arbejdsformen for de særligt udfordrede elever involverer mere lærervejledning.

Elevernes evne til individuelt at arbejde med matematiske problemstillinger skal udvikles, ved at de gradvist får mere og mere ansvar for deres selvstændige arbejde med stoffet hen over det samlede gymnasieforløb. I begyndelsen af forløbet gives grundig stilladsering til det stof, der skal bearbejdes, og de opgaver, der skal løses derhjemme, for på længere sigt at forpligte eleverne selv på at opnå den faglige erkendelse knyttet til det aktuelle stof. Dette kan både være i forbindelse med elevernes skriftlige produkter og deres daglige lektier.

Eleverne skal gradvist indføres i den matematiske sprogbrug, notation og krav til sproglig præcision. Det kan ikke kun læres ved at læse andres matematiske tekster, men skal læres gennem egenproduktion. Dvs. eleverne skal selvstændigt formulere sig skriftligt, så deres matematiske tankegang og sproglige præcision skærpes. Matematik er grundlæggende et skriftligt fag, forstået på den måde at næsten enhver mundtlig aktivitet vil være suppleret af noget skriftligt. Eleverne lærer derfor ikke matematik uden at skrive. Man kan med fordel præsentere eleverne for forskellige fremstillinger af fx matematisk teori hentet fra forskellige lærebøger eller korte matematiske tekster fra artikler el.lign., så de opdager, at symbolsproget kan være forskelligt, på trods af at indholdet er det samme. Netop dette vil være en stor hjælp i arbejdet med studieprojektet (SP) og bør tænkes ind som en del af 2.g-opgaven, når matematik indgår.

Matematikkens mundtlige dimension er ligeledes væsentlig, da det er i elevernes dialog med hinanden og med læreren, at de får afprøvet deres forståelse af matematik, og derigennem opnår ny viden. Eleverne møder mange nye ord i deres matematikundervisning, og de lærer først ordene at kende og erkender først betydningen af dem, når de prøver at anvende ordene i en eller anden form for matematisk kommunikation

– skriftligt eller mundtligt. Den mundtlige dimension kan trænes ved fx at læse højt af matematiske tekster, præsentere et matematisk ræsonnement og diskutere problembehandlingsstrategier.

Der skal på A-niveau også udarbejdes emne- og projektopgaver. I modsætning til C- og B-niveau er det ikke et krav, at disse opgaver skal dække kernestof og supplerende stof eller tilknyttes eksamensopgaver ved den mundtlige prøve, ligesom der heller ikke er krav om antal. For 3-årige forløb på A-niveau bør det dog tilstræbes, at emne- og projektopgaverne involveres i eksamensopgaverne ved den mundtlige prøve. Eleverne bør gøres bevidste om, at en solid og målrettet indsats med disse opgaver vil give et godt udgangspunkt ved den mundtlige eksamen.

En emneopgave skrives i tilknytning til et eller flere hovedemner og skal sammenfatte de centrale dele deraf samt dokumentere de faglige mål, der er opnået gennem arbejdet hermed. Der bør indgå både teoretiske og anvendelsesorienterede elementer, gerne afstemt efter elevernes faglige niveau og ambition. De til emnet hørende fagudtryk og -begreber kan fx øves ved at lade eleverne beskrive dem med deres egne ord. Det vil desuden være oplagt, at der i en emneopgave også gives eleverne mulighed for at se og løse eksempler på mindstekravsopgaver. En emneopgave kan stilles som mindre delopgaver med fokus på forskellige aspekter, der senere samles. Arbejdet med en emneopgave sker procesorienteret, og det endelige produkt skal ikke nødvendigvis evalueres af læreren, men løbende kan der i stedet gives formativ feedback.

Udvalgte forløb tilrettelægges projektorienteret, hvor eleverne i forløbet undersøger forskellige problemstillinger, som ikke nødvendigvis er ens for alle elever. Her udnyttes fx muligheden for, at udfordrede elever får en succesoplevelse i arbejdet med et for dem overkommeligt stof, som ligger på et passende lavt taksonomisk niveau. Projektoplæggene formuleres, så eleverne får mulighed for at arbejde undersøgende, fx kan de formuleres mere eller mindre lukkede afhængigt af elevernes aktuelle niveau. De kan gøres mere åbne, jo længere eleverne er nået i deres matematikfaglige progression på vej mod slutniveauet. Projektforløbet afsluttes, ved at eleverne dokumenterer deres arbejde med fx en projektrapport.

Elever på A-niveau skal gennemføre det centralt stillede matematik B-projekt. For elever, der opgraderer fra matematik på B-niveau til matematik på A-niveau i 3g, sker det naturligt i afslutningen af det samlede matematik B-forløb. For elever, der følger et samlet 3-årigt forløb til matematik på A-niveau, vil det være hensigtsmæssigt at tilrettelægge undervisningen, så det kan ske i slutningen af 2g sammenfaldende med projektperioden for matematik B, men hvis ikke det relevante stof er gennemgået på dette tidspunkt, kan det fx placeres i første semester af 3g med samme projektoplæg.

I projektperioden afsættes i alt 10 timers undervisningstid, hvor læreren er til stede i rollen som vejleder. Det betyder, at man ikke underviser, heller ikke selvom det er fristende at tage en problemstilling, som mange elever har svært ved, op på tavlen og gennemgå den i fællesskab. Problemet med en sådan gennemgang er, at den ikke er tilegnet den enkelte elev, og at eleverne derfor ikke har mulighed for at sige fra, når de selv kan komme videre på egen hånd.

En del af opgaverne i eksamensprojektet kan eleven kun løse ved brug af CAS-værktøj. Eleven har adgang til alle hjælpemidler og it-værktøjer. Det er ikke tilladt at benytte sig af AI-værktøjer til udarbejdelse af denne opgave. Det er dog ikke alle opgaver i eksamensprojektet, hvor eleverne forventes at benytte IT-værktøjer. Ved "beregning" betyder at opgaven skal løses uden brug af CAS-kommandoer, og at "bestem" giver eksaminanden frihed til selv at vælge løsningsmetode. På første side i eksamensprojektet står, hvilke krav der er til besvarelsen herunder ovennævnte oversigt. Det er en god ide, at denne nøje gennemgås med eleverne.

Eleverne skal aflevere en selvstændig og individuel besvarelse. Det betyder ikke, at de ikke må arbejde sammen, men derimod at de selv skal kunne beskrive og forklare, hvad de laver. En gruppe af elever må altså ikke aflevere en fælles løsning, heller ikke selv om de ændrer et par sætninger her og der. Det er en hårfin balance, og som lærer må man tilskynde, at eleverne arbejder selvstændigt, men meget gerne hjælper hinanden.

### 4.3 It

Matematik skal på lige fod med andre fag bidrage til elevernes digitale dannelse. I matematik er det oplagt at beskæftige sig med at genkende, bearbejde, forstå og opbygge algoritmer. Her skal en algoritme generelt set forstås som et sæt regler, der bruges til at løse et problem i et endeligt antal beregnings- eller argumentationstrin, der skal udføres for at nå frem til et resultat, som det fx er tilfældet med numeriske metoder eller udvalgte matematiske beviser.

Matematikfaget har i kraft af de matematiske værktøjsprogrammer en digital platform, som kan anvendes erkendelsesmæssigt, fx i eksperimenterende undersøgelser af sammenhænge og problemstillinger. Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af matematiske værktøjsprogrammer. Specielt af hensyn til elever, der ønsker at opgradere fra et matematikniveau til det næste, bør der træffes velovervejede fælles beslutninger, og det vil samtidig styrke mulighederne for fagligt samarbejde på tværs af klasser og hold. Læreplanens betoning af repræsentationsformerne og skift imellem disse, eksperimentelle aktiviteter og simuleringer peger på, at der bør være adgang til værktøjer, der kan håndtere eksperimentel (dynamisk) geometri og eksperimentel (dynamisk) statistik.

En del elever møder op i gymnasiet med en vis matematikforskrækkelse fra folkeskolen, som kan have medført negativ selvopfattelse med henblik på matematiske færdigheder og kompetencer, der som oftest kommer til udtryk i en demotiveret indstilling til matematik. For sådanne elever kan matematiske aktiviteter med grafiske faciliteter og 'black box'-kommandoer i deres matematiske værktøjsprogram være med til at bløde op for en eventuel modstand. Fx vil grafisk løsning af ligninger parallelt med CAS-ligningsløsning betyde, at disse elever oplever, at de kan noget med matematikken, fordi de ikke sidder fast i afskrækkende algebraisk ligningsløsning.

I grundforløbet skal eleverne blandt andet arbejde med de fire forskellige repræsentationsformer i relation til lineære funktioner og modeller. Introduktionen hertil foregår læringsmæssigt mest effektivt med inddragelse af et matematisk værktøjsprogram, hvor der er let adgang til at skifte mellem repræsentationsformerne, fordi netop dette vil styrke elevernes forståelse af sammenhængen mellem punkter, forskrifter og tilhørende grafisk fremstilling. Ligeledes bør eleverne også allerede i grundforløbet arbejde med at formulere egne hypoteser fremkommet ved eksperimenter i værktøjsprogrammet.

De matematiske værktøjsprogrammets dynamiske muligheder skal især udnyttes til, at eleverne selvstændigt går på opdagelse og eksperimenterer med begreber, repræsentationsformer, modellering og problembehandling, hvor de alene eller sammen med andre elever formulerer konklusioner på undersøgelserne. Eleverne skal derfor hurtigst muligt blive fortrolige med brug af de dynamiske muligheder, et program tilbyder, fx at styre parametre med en skyder, trække i objekter, anvende spor og dataopsamling, samt i at fremstille simple simuleringer, fx i statistik, hvor simulering af terningekast er en god introduktion til faciliteter til håndtering af tilfældige udtræk (random-kommandoer). Elevernes fortrolighed med programmet vil efterhånden øges, og det vil blive et helt naturligt redskab, som de vil benytte til at formulere og undersøge påstande og belæg herfor, som senere kan påvises gennem et formelt matematisk ræsonnement.

Det tager tid at lære at bruge et bestemt program. Derfor bør man inddrage de matematiske værktøjsprogrammer, som skolen har valgt at arbejde med, så tidligt som muligt og som et naturligt redskab på linje med papir, blyant, bøger etc. Herudover kan man i undervisningen med fordel udnytte de didaktiske muligheder, der ligger i at inddrage andre digitale redskaber som fx videooptagere (herunder screencasts), online quizzes og præsentationsprogrammer.

De matematiske værktøjsprogrammernes faciliteter bør altid introduceres i forbindelse med behandling af matematisk stof og ikke ved at afholde et decideret introkursus for eleverne i værktøjsprogrammet. I stedet skal relevante faciliteter introduceres undervejs i undervisningen, når behovene naturligt opstår i behandlingen af det faglige stof. I langt de fleste undervisningssituationer vil brugen af matematiske værktøjsprogrammer ske i en vekselvirkning med papir og blyant. Erkendelse af nye matematiske begreber og sammenhænge kan som oftest understøttes af skift mellem redskaberne. Derfor bør der i de matematiske aktiviteter, som eleverne sættes i gang med, altid indgå overvejelser om, hvordan redskaberne kan inddrages didaktisk mest hensigtsmæssigt. Afgørelsen af, hvorvidt inddragelsen er hensigtsmæssig, beror på den aktuelle situation, idet både 'black box'- og 'white box'-aktiviteter har sin berettigelse i matematikundervisningen. Værktøjerne kan fx kompensere for endnu ikke opnået indsigt i både matematisk teori og problembehandlingsstrategi. Det centrale er, at lærer og elever er bevidste om, hvornår en matematisk aktivitet er 'black box' henholdsvis 'white box'.

Til 'white box'-aktiviteter hører anvendelse af de matematiske værktøjsprogrammer til at lære matematik med, dvs. til at undersøge og forstå begreber og sammenhænge. Fx kan eleverne undersøge parametres betydning i en funktionsforskrift, simulere eller på anden måde eksperimentere sig frem til resultater og postulater, som er beskrevet i afsnit 3 og 4.

I forbindelse med mundtlig og skriftlig formidling spiller elevens digitale kompetencer en større og større rolle. Elevernes kritiske udvælgelse og behandling af relevant information, herunder data, er afgørende for elevernes læring i mange fag. Her kan matematik fx bidrage med opstilling og test af hypoteser samt opstilling og kritisk bearbejdning af både matematiske og statistiske modeller.

## 4.4 Fagsprog

Mange elever har ikke undervisningssproget som deres primære sprog, og i undervisningen bør der derfor være stor opmærksomhed omkring både fagbegreber og før-faglige begreber.

Undervisningen skal tilrettelægges, så der arbejdes systematisk med udvikling af elevernes fag- og symbolsprog samt anvendelse af fagets terminologi. Betydningen af før-faglige begreber som fx *definere, konkludere, argumentere, redegøre, analysere, bevise, udlede* m.m. omtales tidligt i det samlede forløb, og der bør vendes tilbage til dem flere gange. I fx emneopgaver kan eleverne gives mulighed for at forklare faglige termer og begreber med deres egne ord. Løbende kan der gruppevis eller individuelt arbejdes med at opbygge dokumenter med fagordbog og symbol- og formelsamling.

På fagets inspirationsside på Iserasuaat findes materialer (pdf, Word og Maple Help) med begrebs- og ordforklaringer på både grønlandsk og dansk:

<http://www.iserasuaat.gl/da/Den%20Gymnasiale%20Uddannelse/Fag/Matematik/Inspiration%20til%20Undervisning>

## 4.5 Samspil med andre fag

Flere af læreplanens læringsmål involverer fagligt samspil, bl.a. skal eleverne kunne demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder. Ofte kan det være med udgangspunkt i problemstillinger fra dagligliv og samfundsliv. På A-niveau skal eleverne møde mere komplekse problemstillinger.

Tilsvarende omfatter det faglige indhold under supplerende stof oplagte muligheder for fagligt samspil, idet der kan vælges de emner, der giver mest mening i studieretningen. På A-niveau skal eleverne møde matematikhistoriske perspektiver på udvalgte emner.

Når der arbejdes med læreplanens øvrige faglige indhold, opfyldes ovenstående løbende ved inddragelse af historiske aspekter, ved tydeliggørelse af, hvilke matematiske metoder der er i spil, og ved diskussion af matematikdisciplinens kendetegn samt inddragelse af problemstillinger fra andre fagområder etc.

I grundforløbet er det særligt science og dansk, der kan indgå i faglige samspil med matematik, mens det i studieretningen er særligt vigtigt at inddrage studieretningens centrale fag i faglige samspil med matematik. I den lokale planlægning af både grundforløb og studieretningsforløb vil der formentlig være forskellige andre fag, der kan være naturlige samarbejdspartnere for matematik. Mindst ét af de tværfaglige forløb, som matematik indgår i, bør være med et centralt fag i studieretningen.

Stofudvælgelsen foretages gennem hele forløbet med øje for holdets muligheder for fagligt samspil. Valg af stof i grundforløbet kan således koordineres med science. Den lineære model er her omdrejningspunktet for matematikundervisningen, og det er oplagt at arbejde med lineære modeller af naturvidenskabelige sammenhænge, herunder udføre lineær regression på data, som eleverne har produceret i science. Tilsvarende kan der være andre kernestofemner, som er oplagte at behandle i faglige samarbejder eller parallellæsning. Desuden er det oplagt at inddrage eksempler på anvendelse af matematik hentet fra andre fag, som eleverne kender til og måske selv henleder opmærksomheden på.

For at forberede eleverne på studieprojektet (hvad enten de påtænker at skrive SP med eller uden matematik) bør der tilrettelægges aktiviteter, der giver eleverne mulighed for at kommunikere både skriftligt og mundtligt om deres tværfaglige arbejde, herunder redegøre for matematiske metoder i et sprog, som man også uden for faget kan forstå.

## 5. Evaluering

Evaluering er en central del af al undervisningspraksis, således også i matematikundervisningen i gymnasiet. Evaluering skal være et redskab for både lærer og elever til at gøre undervisning og læring mere motiverende og mere effektiv for den enkelte.

### 5.1 Løbende evaluering

Evaluering af elevernes faglige udbytte sker gennem løbende evaluering og feedback. Den løbende evaluering skal relatere sig til både elevens mundtlige og skriftlige niveau, og progression skal indtænkes i den løbende evaluering. Således bør formativ evaluering være dominerende i begyndelsen af et niveau, hvor der er fokus på, hvordan eleven kan forbedre sit faglige niveau, mens summativ evaluering bør være dominerende i slutningen af niveauet, bl.a. i form af terminsprøve og/eller prøveeksamen.

Den løbende evaluering af elevens matematikfaglige udbytte har til formål dels at give eleven respons på vedkommendes arbejde, så dette kan forbedres, og dels at hjælpe underviseren med at finde elevens niveau ved karaktergivning - både terminskarakterer og afsluttende standpunktskarakterer. Det skal være tydeligt for eleven i den løbende evaluering, hvorledes denne klarer sig i forhold til mindstekravene, og at der gives klare retningslinjer for, hvorledes eleven kan arbejde med at opnå kravene. Beskrivelsen af karaktererne A, C og E i både mundtlig og skriftlig findes under 5.3 Bedømmelseskriterier.



Evaluering af det mundtlige faglige niveau foregår via feedback på mundtlige præstationer som fx mundtlige fremlæggelser (evt. video) eller mundtlige svar på spørgsmål i undervisningen. I enhver kommunikation

med eleverne i klassen i form af klassedialog, gruppearbejde, elevfremlæggelse mv., hvor eleverne kommer med faglige input, giver læreren passende feedback (niveausvarende) med henblik på brug af fagbegreber og faglig præcision med det for øje, at eleverne skal lære et nyt sprog ('at tale matematisk'). I matematik er der oftest et korrekt svar eller en præcis formulering af et svar, men elevbidrag bør anerkendes og roses, så alle elever får mod på at deltage aktivt. Langt de fleste elevbidrag kan bruges positivt i vejen frem mod det størst mulige matematikfaglige udbytte for hver enkelt elev, og matematikkens præcise sprogbrug bør hele tiden udvikles i elevernes dialog med hinanden og med læreren.

Indimellem tilrettelægges korte individuelle evalueringssamtaler med fokus på elevens potentielle matematikfaglige udviklingsmuligheder. Evalueringssamtaler, der som oftest er af formativ karakter, kan fx afholdes i forbindelse med prøver, projektarbejde og rapporter, mundtlige fremlæggelser eller andet selvstændigt arbejde. Det kan også være i forbindelse med afgivning af standpunktskarakterer, hvor man afholder samtalen enten før eller efter, eleverne har fået deres karakterer. Selvevaluering kan danne grundlaget for samtalen, idet eleverne ofte har god og realistisk vurdering af deres niveau.

Evaluering af elevernes skriftlige produkter bør gives på en række forskellige måder afhængigt af, hvilken type skriftligt produkt der er tale om, og afhængigt af, hvilket formål produktet har. Elevernes skriftlige produkter bør have mange forskellige udtryksformer.

Et skriftligt produkt bør altid have et eksplicit formål, som bør formuleres tydeligt for eleven. Når en lærer giver feedback på et elevprodukt, hvor det primære formål har været at dokumentere elevens faglige niveau, så vil feedbacken ofte være i form af en karakter eller anden summativ bedømmelse (fx ud fra SOLO-taksonomien). Det modsatte vil være tilfældet, når formålet med elevproduktet har været læring af ny matematik. Her er konkrete fremadskuende anvisninger mere effektive end en afsluttende bedømmelse.

SOLO TAKSONOMI (Structure of the Observed Learning Outcome)				
	Angive Formler	Forklare og definere begreber	Identificere forskelle	Opstille teorier og hypoteser
	Udføre simple løsningsprocedurer	Udføre rutinemæssige løsningsprocedurer	Kombinere begreber	Bevise og generalisere
			Analysere og bevise	Reflektere
			Anvende begreber	Perspektivere
"Misses the point"				
Præ-strukturel	Uni-strukturel	Multi-strukturel	Relationel	Abstrakt
Ingen forståelse	Overflade forståelse		Dybde forståelse	
KVANTITATIV FASE			KVALITATIV FASE	

I forbindelse med skriftligt arbejde bør det tydeliggøres, hvorvidt eleverne skriver for at lære eller for at dokumentere deres viden, og hvad et eventuelt bedømmelsesgrundlag omfatter. Feedback på skriftligt arbejde bør tænkes individuelt og differentieret, så den enkelte elev kan opnå optimal læring. Den formative feedback bør være dominerende i en væsentlig del af undervisningen frem mod det afsluttende niveau.

Meget tyder på, at de fleste elever lærer mest ved at få hjælp i skriveprocessen fremfor at få afsluttende kommentarer på et produkt. Læreren bør derfor som oftest tilrettelægge det skriftlige arbejde, så eleverne får feedback på flere stadier i deres udarbejdelse af et produkt.

Tests kan anvendes som evaluering af både mundtligt og skriftligt niveau. Evaluering af mundtligt niveau kan fx ske gennem en test med åbne forståelsesrelaterede spørgsmål "Hvad forstås ved en tangent til en graf?". Tests kan være korte seancer i starten eller slutningen af et modul, eller det kan være længerevarende tests. Korte tests er uformelle, ofte er eleverne uforberedte, og testene har et formativt sigte. Længerevarende tests på et helt modul vil typisk være forberedte og have et overvejende summativt sigte. Nogle tests vil læreren rette og bedømme, mens andre fx bedømmes af andre elever eller i fællesskab på klassen. Mindstekravsopgaver bør være et element i elevernes selvevaluering, og de kan være et hjælperedskab i lærerens evaluering af eleverne, når de indgår i fx tests, skriftlige afleveringsopgaver, emneopgaver og projektrapporter.

### 5.1.1 Grundforløbsscreening

I sidste halvdel af grundforløbet gennemføres en individuel skriftlig screening, gerne forud for elevernes eventuelle omvalg af studieretning. Screeningen varer to timer og skal anvendes til at få et indblik i, om den enkelte elev er i stand til at anvende grundforløbets obligatoriske kernestof (lineære funktioner og lineære modeller) til at løse forskellige typer af opgaver knyttet hertil. Eleverne skal under hele prøven have adgang til alle de sædvanlige hjælpemidler, dvs. relevante undervisningsmaterialer (herunder også digitale ressourcer på nettet), egne noter og matematisk værktøjsprogram, men uden kommunikation med andre. Screeningsens mål ikke er at fastslå et standpunkt, og det er derfor ikke et krav, at screeningen skal bedømmes med en karakter. En formativ tilbagemelding, knyttet til elevens nødvendige indsats set i forhold til dennes fremtidige matematikniveau, vil være mere konstruktiv for elevens eventuelle valg af studieretningsskift.

Skolen eller den enkelte lærer kan selv sammensætte den afsluttende screening – eller der kan blot benyttes én af de mange vejledende screeninger fra stx, htx eller hhx, der er lagt ud på Prøvebanken. Eksempler er også tilgængelige via materialedeling i Teams-gruppen Matematik GUX.

### 5.1.2 Årsprøver

Det kan anbefales at lade eleverne afprøve eksamenssituationen i form af en årsprøve i 1g (skriftlig eller mundtlig) og/eller i 2g (mundtlig). Årsprøven bør da have samme struktur som den afsluttende eksamen, så eleverne kan opnå en vis fortrolighed med og træning i fagets prøveformer. Skolen kan overveje at placere sådanne årsprøver i det tidsrum, hvor der afvikles afsluttende skriftlige prøver for 3g-eleverne.

## 5.2 Prøveformer

Der afholdes en skriftlig samt en mundtlig prøve i matematik på A-niveau. De indgår begge i elevernes prøveudtræk, dog således, at elever på matematik A skal til mindst én prøve.

Regler vedrørende eksaminandernes brug af internettet for at tilgå tilladte hjælpemidler ved prøverne fremgår af § 6 i "[Bekendtgørelse om visse regler om prøver og eksamen i de gymnasiale uddannelser](#)". Nærmere vejledning om tilladte hjælpemidler kan findes i denne [FAQ](#) samt i [hjælpeiddeloversigten](#).

### 5.2.1 Den skriftlige prøve

Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 2 timer, og delprøve 2 varer 3 timer. Desuden udsendes ca. 3 uger før prøven (sommerterminen) et forberedelsesmateriale, som eleverne selvstændigt under vejledning skal arbejde med i 10 timer, der afsættes af holdets samlede undervisningstid. Skolen kan derudover selv fastsætte en mængde elevtid. Materialet kan være en

matematisk tekst, der uddyber eller perspektiverer et kernestofemne eller introducerer et helt nyt emne. Der kan heri indgå behandling af et større datamateriale. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet samt indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet. Materialet vil danne grundlag for 10-15 procent af det samlede pointtal i et opgavesæt ved den skriftlige prøve.

Forberedelsesmaterialet er også gældende for den skriftlige eksamen ved den efterfølgende prøvetermin i august (sygeeksamen) samme kalenderår.

Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling, der aktuelt er Matematisk formelsamling stx A, Matematiklærerforeningen 2018. Formelsamlingen skal være ren, dvs. uden tilføjelser bortset fra eventuelle indstik fra forberedelsesmaterialet. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler (bortset fra AI samt kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 4.3.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.

Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.

Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i A-niveauet med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på de underliggende niveauer (C- og B-niveau) og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau. Der kan også forekomme opgaver, der tager direkte udgangspunkt i stof hørende til de underliggende niveauer (C- og B-niveau), hvor problemstillingen dog er af en sådan karakter, at det kræver et abstraktionsniveau hørende til A-niveauet.

En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene (jf. afsnit 3.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125% af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren E. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.

Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. Der anvendes som standard dansk decimalkomma (fx 1,53 og ikke 1.53), og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere data i forskellige formater.

I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.

De vejledende opgavesæt og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, men uden at være definerende. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes i det lukkede Teams-forum Matematik GUX for de grønlandske matematikgrupper.



## 5.2.2 Den mundtlige prøve

Grundlaget for den mundtlige prøve er det samlede indhold i fagets kernestof, mindstekrav og supplerende stof tillige med den enkelte elevs emneopgaver og projektrapporter samt andet skriftligt og mundtligt arbejde fra undervisningen.

Det samlede grundlag skal fremgå af undervisningsbeskrivelsen, der skal sikre et entydigt eksaminationsgrundlag.

Eleven skal være indstillet på, at dele af eksaminationen vil forme sig som en samtale/eksamination mellem eksaminand og eksaminator, hvor censor kan stille uddybende spørgsmål.

Det er de faglige mål konkretiseret i bedømmelseskriterierne jf. 5.3, der er grundlaget for bedømmelsen af eksaminandens præsentation.

Eksaminator skal løbende gennem skoleåret informere eleverne om, hvordan spørgsmålene til den mundtlige prøve kan forventes at se ud, således at eleverne er bekendt hermed. Eleverne skal endvidere gøres bevidste om formålet med forberedelsestiden, og herunder hvordan tiden kan udnyttes bedst muligt.

Det er vigtigt, at eksamensopgaverne udformes brede, således at eksaminanden gives mulighed for at vise selvstændighed. Derudover er det væsentligt at tilgodese både den elev, der skal have karakteren E og den elev, der skal have karakteren A.

I en uddybning og perspektivering af emnet bør der lægges op til at eksaminanden selvstændigt kan inddrage relevant stof indenfor emnet og på den måde kan gives mulighed for at vise fagligt overblik og progression indenfor emnet.

Et udkast til den kendte del af eksamensopgaverne til den mundtlige prøve skal offentliggøres og drøftes med eleverne i god tid, om muligt mens der fortsat er undervisning, så det er klart for dem, præcist hvilke krav en given formulering dækker over. De endelige eksamensopgavers kendte del, som så vidt muligt skal være ækvivalente i omfang og sværhedsgrad, skal offentliggøres senest en uge før prøvens afholdelse (med forbehold for eventuelle censoranbefalede ændringer).

I det følgende er indholdet og afviklingen af den mundtlige prøve på A-niveau uddybet.

### *Den mundtlige prøve på guxA*

Ved den mundtlige prøve i matematik A får eksaminanden ved lodtrækning en eksamensopgave, der indeholder:

- to-tre delopgaver til det overordnede emne for eksaminationen
- et ukendt bilag, der perspektiverer emnet

Opgaverne skal formuleres, så prøven kan have fokus på eksaminandens evne til på selvstændig vis at gennemføre matematiske ræsonnementer og bevisførelse samt indgå i en faglig samtale om det overordnede emne.

For treårige hold til A-niveau må eksamensspørgsmål, der vedrører kernestof fra tidlige forløb, om fornødent forstærkes med indhold eller metode fra den senere undervisning, så de i omfang og sværhedsgrad er ækvivalente med eksamensspørgsmål fra sidst i undervisningen. Eksempelvis kan et eksamensspørgsmål om vækstmodeller suppleres med indhold vedr. differentiaalligninger, eller et eksamensspørgsmål i trigonometri kan suppleres med krav vedr. vektorregning.

For étårige hold til A-niveau må eksamensspørgsmål, der omfatter stof fra underliggende niveau, om fornødent forstærkes med indhold eller metode fra det étårige hold, så eksamensspørgsmålene i omfang og sværhedsgrad fra hele stofområdet på A-niveau kan være ækvivalente. Da der på A-niveau stilles højere krav til ræsonnement og bevisførelse end på B-niveau, er det nødvendigt at være særligt opmærksom på, hvordan stof fra B-niveau indgår i eksamensspørgsmålene.

Prøven består dels af eksaminandens præsentation af sit svar på den udtrukne opgave, og dels af en uddybende faglig samtale med udgangspunkt i det ukendte bilag samt det overordnede emne for opgaven. Fordelingen mellem de to faser er ikke præcist fastsat, men som rettesnor påbegyndes den faglige samtale senest, når halvdelen af eksaminationstiden er gået.

Det ukendte bilag skal perspektivere opgaven gennem billeder, figurer, grafer, tabeller, formler, kort overskuelig tekst og lignende. Et bilag kan også være en fysisk genstand som fx 3D-print. Bilaget udleveres efter lodtrækningen til eksaminanden, som får det med til forberedelse. Eleverne skal være bekendt med, hvordan de ukendte bilag kan se ud, og hvordan man kan inddrage disse i en samtale, men de aktuelle bilag må ikke være kendte for eleverne forud for eksamen.

Det forventes, at der udarbejdes 14-18 eksamensopgaver. Opgaverne skal tilsammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof, idet hovedvægten på A-niveau lægges på stof, der er behandlet sent i undervisningsforløbet.

For større hold skal opgaverne gå igen, således at det samlede antal som minimum svarer til antallet af eksaminander plus tre. Alle opgaver skal gå igen lige mange gange, og alle opgaver skal lægges frem ved prøvens start.

De kendte eksamensopgaver og tilhørende ukendte bilag sendes til censor mindst 5 hverdage før prøvens afholdelse, medmindre særlige forhold er til hinder herfor. Det kan betyde, at udsendelsen må foretages, før eksamensplanen er offentliggjort. Udsendelsen af opgaver og materialer må da kun ske i et omfang, der ikke medfører, at andre dele af eksamensplanen kan udledes.

## 5.3 Bedømmelseskriterier

Bedømmelsen er knyttet til de læringsmål, som grundlæggende karakteriserer det pågældende niveau. Bedømmelsen er altid en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante læringsmål (jf. afsnit 3.1).

Ved både skriftlige og mundtlige prøver gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.

Når der afgives karakterer, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er blot ét skalatrin og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få trin. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. I de efterfølgende tabeller (tabel 1) er det på skematisk form beskrevet, hvorledes GGS-skalaens terminologi kan knyttes sammen med læringsmålene for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på det aktuelle niveau for karaktererne E, C og A.

### 5.3.1 Bedømmelse: Den skriftlige prøve på guxA

Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås, i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.

Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål.

En fuld besvarelse af ca. 80% af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren E. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren E ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80% af mindstekravsopgaverne i opgavesættet.

Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.

Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og terminologi samt operere med matematiske begreber.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.

Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*  
Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*  
Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*  
Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*  
Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.

Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring bemærkes, at ordet "parametre" omfatter både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som "Indfør passende variable..." betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som "Gør rede for, hvad tallene fortæller om..." hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er der ikke krav om en konklusion.

I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart.

### 5.3.2 Bedømmelse: Den mundtlige prøve på guxA

Ved den mundtlige prøve lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan præsentere et konkret afgrænset matematisk emne på en klar og overskuelig måde.
- demonstrerer indsigt i matematisk teori og tankegang.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og terminologi samt operere med matematiske begreber.
- kan argumentere for en matematisk påstand og/eller opstille en matematisk model.
- kan diskutere, vurdere og anvende hensigtsmæssige matematiske metoder til modellering og problembehandling.
- demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement og bevisførelse.
- har overblik over og kan perspektivere et konkret afgrænset matematisk emne.

## 6. Bilag

### 6.1 Bilag 1: Karakterbeskrivelser

**Table 1: Oversigt over karakterskalaen**

A	Fremragende	Karakteren A gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler.
C	God	Karakteren C gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler.
E	Tilstrækkelig	Karakteren E gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål.

**Table 2: Den skriftlige prøve på A-niveau**

A	I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet korrekt og hensigtsmæssigt. Hvor det er relevant, er løsninger og modeller vurderet. Besvarelsen er veldokumenteret med sikker brug af figurer og symbolsprog. Der demonstreres stort fagligt overblik på alle felter og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres sagligt for de anvendte løsningsmetoder. Eksaminanden behersker fagets terminologi og kan skifte mellem forskellige repræsentationsformer. Kommunikationsværdien er meget høj, idet der på en naturlig måde skiftes mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. I besvarelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.
C	I besvarelsen benyttes matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – på en fornuftig måde. Der demonstreres et solidt og bredt fagligt overblik, og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres i et vist omfang for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er dokumenteret med en god brug af figurer og symbolsprog. Eksaminanden er delvist i stand til at opstille og behandle matematiske modeller og vurdere løsningerne. Kommunikationsværdien er god, idet eksaminanden kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. Eksaminanden behersker fagets terminologi og har et godt kendskab til sammenhængen mellem forskellige repræsentationsformer. I besvarelsen forekommer adskillige fejl og mangler.
E	I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet på et meget elementært niveau. Matematiske ræsonnementer anvendes usikkert og usammenhængende. Dokumentation er mangelfuld med ringe brug af figurer og symbolsprog. Der demonstreres et beskedent fagligt overblik og eksaminanden har kun kendskab til en begrænset del af stoffet. Eksaminanden er i ringe grad i stand til at opstille og behandle simple matematiske modeller, men kan løse elementære opgavetyper. Anvendelsen af fagets terminologi er usikker. Kommunikationsværdien er beskedent, idet eksaminanden kun i mindre udstrækning kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.  Honorering af fagets mindstekrav giver mindst karakteren E.

**Tabel 3: Den mundtlige prøve på A-niveau**

A	Fremstillingen er velstruktureret og fagets terminologi anvendes sikkert. Der veksles problemfrit mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer meget stor fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden viser et stort overblik på alle felter samt evne til at generalisere. Hvor det er relevant, veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer. Ved fremlæggelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.
C	Fremstillingen er godt struktureret, og fagets terminologi benyttes. Der veksles på tilfredsstillende måde mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer en vis fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse, der kombineres med konkrete anvendelser. Eksaminanden har et godt overblik på mange områder og kan i nogen grad generalisere. Der veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer. Ved fremlæggelsen forekommer adskillige fejl og mangler.
E	Fremstillingen er ustruktureret. Eksaminanden behersker kun mangelfuldt fagets terminologi og skifter usikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog, samt mellem forskellige repræsentationsformer. Eksaminanden demonstrerer en beskedent fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement, hvor væsentlige argumenter udelades. I stedet vises eksempler på konkrete anvendelser. Eksaminanden har et mangelfuldt overblik og har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.