

Opgaveformuleringer til studieprojekt - Matematik og andet/andre fag:

Fag: Matematik/Historie

Emne: Det gyldne snit og Fibonaccitalle

Du skal give en matematisk behandling af det gyldne snit.

Du skal redegøre for de grundlæggende matematiske fremskridt i renæssancen med særligt henblik på, hvordan Fibonacci foregriber renæssancen.

Du skal endvidere give en matematisk behandling af Fibonaccitalle. Behandlingen skal indeholde en redegørelse for sammenhængen mellem det gyldne snit og Fibonaccitalle, men du kan også vise andre sætninger, der omhandler Fibonaccitalle og deres egenskaber.

Du skal give en vurdering af det gyldne snits betydning for kulturen og naturen, idet du giver eksempler fra renæssancen på anvendelser af det gyldne snit, samt dets optræden i naturen.

Fag: Matematik/Biologi

Emne: Epidemimodeller

Belys forløbet af en typisk infektion med influenza-virus, og kom herunder ind på, hvorledes immunforsvaret bekæmper infektionen.

På baggrund af dette ønskes en gennemgang af den matematiske model SIR for epidemier med smitsomme sygdomme.

Foretag en simulering af en influenza-epidemi ved hjælp af SIR-modellen. Vurder med baggrund i SIR effekten af influenza-vaccinationsprogrammet for alle over 60 år og andre muligheder for vaccinationsindsatser.

Diskuter hvad man på samfundsplan kan gøre for at forhindre og begrænse udbrud af smitsomme sygdomme, og hvordan matematiske modeller som SIR kan bruges i den forbindelse.

Fag: Matematik/Fysik

Emne: Differentialligninger og svingninger

Gennemgå teorien for løsning af 2. ordens lineære differentialligninger af typerne:

$$y'' = cy \text{ og } y'' + ay' + by = 0$$

og løs i forbindelse hermed nedenstående opgave.

Gør rede for, at man kan beskrive svingende systemer ved hjælp af ovenstående differentialligninger.

Forklar begreberne stærkt, kritisk og svagt dæmpet harmonisk svingning.

Begrund ud fra Newtons 2. lov, at en fjeders svingninger kan beskrives ud fra en anden ordens differentialligning, og perspektiver emnet med inddragelse af praktiske anvendelser af en fjeders svingninger.

Opgave

Bestem den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger:

i) $y'' - 4y' + 3y = 0$

ii) $2y'' + 4y' + 2y = 0$

Bestem desuden den løsning til b) som går gennem punkterne $(0,0)$ og $(2,4)$

Fag: Fysik/Matematik/Teknikfag

Emne: Hookes lov og Bjælkelære

Gør rede for Hookes lov.

Forklar begrebet kraftmoment.

Giv en fremstilling af teorien for bjælkens udbøjning, når de påtrykkes en kraft. Kom herunder ind på, hvilken rolle Hookes lov spiller i denne teori.

Gør rede for begrebet bøjningsstivhed, herunder elasticitetsmodul (Youngs modul).

Gør specielt rede for begrebet fladeinertmoment og tværsnittets betydning for bøjningsstivheden.

Vis, hvorfor og hvordan man kan opstille og løse integraler til bestemmelse af fladeinertmoment for forskellige tværsnit.

Du skal udføre en række forsøg, hvor du bestemmer sammenhængen mellem udbøjning og påtrykt kraft for en række forskellige profiler (herefter kaldet bjælker). I dine eksperimenter skal du variere det sted på bjælken, hvor udbøjningen måles, samt kraftens placering på bjælkerne og relatere dine resultater til teorien.

Du skal både udføre eksperimenter med fast indspændte bjælker og simpelt understøttede bjælker.

Giv desuden en analyse af nedenstående data (*kilde:emu.dk*):

Nedbøjning af vandret bjælke af fyrretræ: $l = 1,000$ m $a = 70$ mm $b = 70$ mm.

Bjælken belastes af en lodret kraft på midten. Bøjningen måles på midten.

Trykkraft	Nedbøjning
kN	mm
1,0	1,23
2,0	2,49
3,0	3,56
4,0	4,58
5,0	5,65
6,0	6,62
7,0	7,53
8,0	9,04
9,0	10,14
10,0	10,68
11,0	12,28

Fag: Matematik/Fysik

Emne: Taylorpolynomier og matematisk pendul

Gør rede for Taylorpolynomier, og hvordan de kan benyttes til at lave tilnærmelser til funktioner.

Bevis sammenhængen mellem de afledede for en funktion og dens Taylorpolynomium

Bevis Taylors sætning med Lagranges restled.

Lav ved hjælp af Taylorpolynomier en tilnærmelsesformel for nogle funktioner. Vurder fejlen på tilnærmelsesformlen ved hjælp af Lagranges restled.

Opskriv kraften på et matematisk pendul og udled den 2. ordens differentialligning, som beskriver pendulets bevægelse. Løs differentialligningen for små udsving ved hjælp af Taylorudvikling og bestem herved en formel for svingningstiden for det matematiske pendul.

Bestem ved hjælp af nedenstående opgave en bedre tilnærmelse til svingningstiden.

Udfør en række forsøg med matematisk pendul, hvor du undersøger gyldigheden af formlen for svingningstiden, samt undersøger betydning udsvingets størrelse har. Undersøg om formlen for svingningstiden i nedenstående opgave passer bedre med eksperimenterne.

Opgave

Følgende generelle formel for svingningstiden af et matematisk pendul kan vises.

$$T(\theta_{\max}) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \sin^2(u)}} du$$

Opskriv Taylorpolynomiet af 1. grad for $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ud fra $x_0 = 0$.

$$x = \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \cdot \sin^2(u)$$

Indsæt $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ i dette Taylorpolynomium og indsæt det fremkomne udtryk i ovenstående formel og vis herved, at svingningstiden med tilnærmelse kan udtrykkes som

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right)$$

Fag: Matematik/Teknikfag/Fysik

Emne: Bestemmelse af inertimomenter

Du skal kort gøre rede for teorien bag stive legemers rotation omkring en akse. Der skal i redegørelsen indgå begrebet inertimoment.

Du skal gøre rede for, hvordan man kan bestemme formler for inertimomenterne af symmetriske legemer ved hjælp af integralregning. Bestem formlerne for inertimomenterne af legemer af forskellig form og ophængt på forskellig vis.

Du skal eksperimentelt bestemme inertimomentet i forbindelse med:

- Fysisk pendul
- Et eller flere selvvalgte legemer

Sammenhold de målte værdier med de teoretiske formler.

Løs også følgende opgave:

Bestem inertimomentet af en cirkulær plade med radius R og masse M med rotationsakse vinkelret på pladen gennem pladens massemidt punkt.

Fag: Historie/Matematik

Emne: Kvinder i Matematikken - Sophie Germain og den franske revolution

Redegør i hovedtræk for det franske samfunds opbygning og forandring i perioden omkring den franske revolution med særligt fokus på kvindernes stilling og rolle.

Undersøg ud fra relevant kildemateriale oplysningstidens og den franske revolutions syn på uddannelse og videnskab.

Omtal Sophie Germain's arbejde med matematik, bl.a. hendes bidrag til løsning af Fermats store sætning.

Giv et bevis for Fermats store sætning i tilfældet $n = 4$.

Vurdér Sophie Germain's muligheder og betydning som naturvidenskabskvinde i datidens franske samfund.

Fag: Fysik/Matematik

Emne: Newtons afkølingslov

Du skal belyse teorien bag lineære 1. ordens differentiallyigninger og bevise nogle sætninger.

Redegør for den differentiallyigning der beskriver Newtons afkølingslov og find den fuldstændige løsning til differentiallyigningen.

Udfør et eksperiment, hvor du bestemmer, hvordan et legemes temperatur ændrer sig med tiden, når det udveksler varme med omgivelser med en konstant temperatur.

Gentag, så vidt tiden tillader det, eksperimentet under forskellige vilkår og benyt Newtons afkølingslov i behandlingen af eksperimenterne.

Bestem varmeoverføringskoefficienten for hvert forsøg, så løsningskurven passer med måledata.

Fag: Historie/Matematik

Emne: Galilei og det naturvidenskabelige verdensbillede

Giv en kort biografi over Galilei (1564 – 1642).

Du skal analysere, hvordan Galilei anvender parablen som matematisk model for bevægelsen af et projektil, som kun er påvirket af tyngdekraften.

Sammenlign Galileis matematiske begreber og metoder med nogle af de nutidige matematiske begreber og metoder.

Du skal løse nedenstående opgave, idet du også kort forklarer de matematiske begreber du anvender.

Sammenlign det verdensbillede, som var gældende i 1600-tallet (og som Galilei udfordrede) med det verdensbillede, som Galilei selv præsenterede. Vurder hvorfor der fra den katolske kirkes side var så stor modstand mod Galileis nye verdensbillede.

Opgave

Et projektil antages kun at være påvirket af tyngdekraften. Det affyres i vandret terræn med udgangshastigheden 800 m/s og skudvinklen 40° .

- a) Opstil en parameterfremstilling for projektilbanen.
- b) Beregn hastighedsvektoren 5 sekunder efter affyringstidspunktet.
- c) Beregn skudvidden, skudhøjden og nedslagstidspunktet.

Fag: Historie/Matematik

Emne: Navigation

Der ønskes en præsentation af sfærisk geometri. Herunder skal sfæriske trekanter omtales, idet cosinus- og sinusrelationerne bevises.

Du skal skaffe dig længde- og breddegrader for et sted på den vestlige halvkugle og et sted på den østlige halvkugle. Hvad er længden af den korteste vej mellem de to punkter?

Redegør for hvordan søfolk gennem tiderne har navigeret på havet med vægt på de store opdagelser, herunder hvordan søfolk har bestemt bredde og længde.

Diskuter navigationens betydning for disse rejser.